平 成 24 年 度

大学院入学試験問題

物 理 学

午前９：00～11：00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ４問のうち，任意の２問を選んで解答すること。
4. 解答用紙２枚が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

I. 図 1.1 のように，質量が一様に分布した棒状の部材 OA, AB, BC が摩擦の無いピン A, B で互いに連結され，摩擦の無いピン支点 O, C を用いて地面に支えられている。また，ピン A は重さを無視できるロープ AD を用いて天井に吊るされている。部材 OA と AB は水平，部材 BC は鉛直である。部材 OA と BC の長さを r, 質量を m, 部材 AB の長さを $2r$, 質量を $2m$, ピン A と B の質量は無視でき，重力加速度は g であるとする。このとき，ロープ AD を切った瞬間の部材の運動について以下の問いに答えよ。ただし，地面に対して固定された xyz 座標系を図 1.1 のように定義し，x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする。また，必要があれば，長さ r，質量 m の棒状の部材の，重心周りの慣性モーメントが $\dfrac{1}{12}mr^2$ であることを使っても良い。

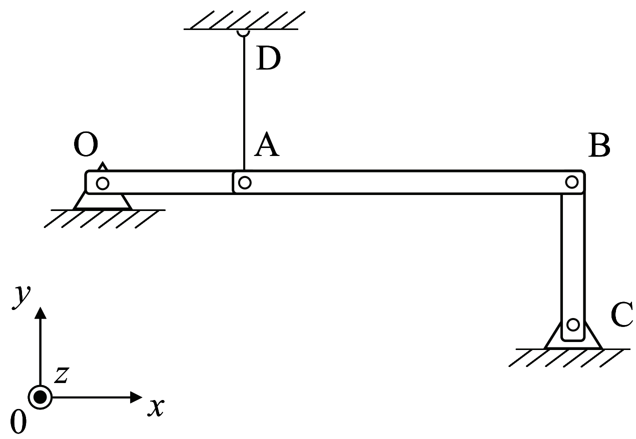

図 1.1

1. 部材 OA の反時計回りを正とした角加速度を α_A として，地面から見たピン A の加速度をベクトルで表せ。
2. 部材 AB の反時計回りを正とした角加速度を α_B として，ピン A から見たピン B の加速度と，地面から見たピン B の加速度をそれぞれベクトルで表せ。
3. 角加速度 α_B を α_A を用いて表せ。
4. 部材 OA の動的つり合いを考えることにより，A 点において部材 OA が部材 AB に及ぼす力を，α_A, r, m, g を用いてベクトルで表せ。

5. 部材 AB の動的つり合いを考えることにより，B 点において部材 AB が部材 BC に及ぼす力のベクトルと α_A を求め，必要に応じて r, m, g を用いて表せ。

II. 図 1.1 と同じ部材の組み合わせについて，図 1.2 のように部材 OA が時計回りに一定の角速度 ω_o で回転している場合を考える。以下の問いに答えよ。

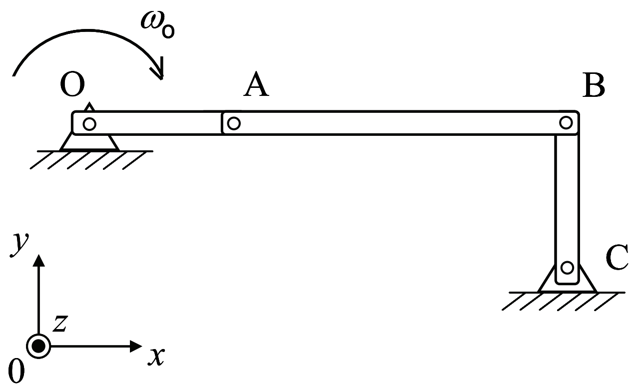

図 1.2

1. 地面から見たピン B の加速度と，部材 BC の角加速度を，それぞれベクトルで表せ。必要に応じて ω_o, r を用いよ。
2. 部材 BC の回転に関する動的つり合いの式から，B 点において部材 AB が部材 BC に及ぼす力の x 成分を，ω_o, r, m を用いて表せ。
3. 部材 AB の動的つり合いを考えることにより，A 点において部材 OA が部材 AB に及ぼす力のベクトルを求めよ。また，B 点において部材 AB が部材 BC に及ぼす力の y 成分を求めよ。それぞれ必要に応じて ω_o, r, m, g を用いよ。

第 2 問

図 2.1 に示すように，十分に長い円筒導体 A，B が誘電率εの気体中に同軸配置されている。導体 A の外半径はa，導体 B の内半径はbであり，導体 A は電源に接続され，導体 B は接地されている。中心軸からの距離をrとして，以下の問いに答えよ。

参考のため，円筒座標系におけるベクトル演算子を以下に示す。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (A_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial (A_z)}{\partial z} \tag{1}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{2}$$

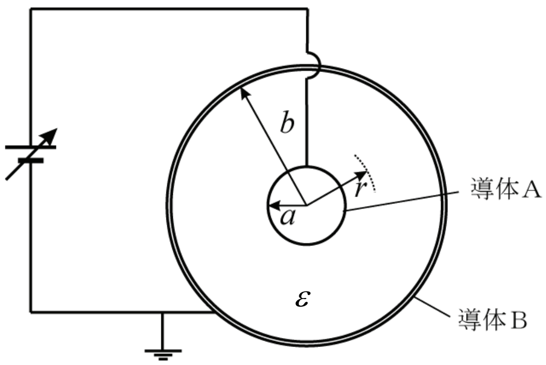

図 2.1

I. 導体 A に電圧$V_0 (V_0 \geq 0)$を印加した。
   1. $r\,(a < r < b)$における電位及び電場の大きさを求めよ。
   2. 導体 A の単位面積あたりにかかる力の大きさと向きを求めよ。

II. 導体 A に印加する電圧を上昇させたところ，ある閾値を超えると図 2.2 に示すように導体 A の表面で気体が電離し、定常的にイオンが発生するようになった。発生したイオンは，電場に比例した速度$\boldsymbol{v} = \mu \boldsymbol{E}$で導体 B に向かって移動し，導体 AB 間に電流が流れた。ここでμは定数である。このように電流が流れている時の導体 A の表面の電場の大きさをE_{i}，導体 AB 間の軸方向単位長さ当たりの電流をIとする。

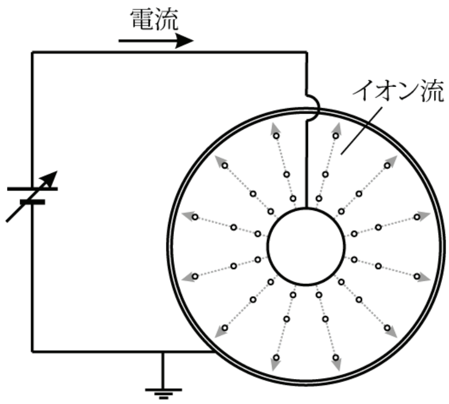

図 2.2

1. $r\,(a < r < b)$ におけるイオン電荷密度 $\rho(r)$ を，電場の大きさ $E(r)$ を用いて表せ。
2. $E(r)$ が満たす微分方程式を求めよ。
3. 2.で導出した微分方程式を解き，$E(r)$ を求めよ。$G(r) = \{E(r)\}^2$ として，式変形するとよい。
4. 一般に E_{i} は導体 A に印加する電圧によらず一定とみなせる。導体 AB 間の電場分布は，イオン流の発生によって静電場分布からどのように変化するか簡潔に説明せよ。

第 3 問

理想気体の状態方程式は $PV = nRT$ で表される。ここで，P は圧力，V は体積，n はモル数，R は気体定数，T は温度である。さらに R とボルツマン定数 k，アボガドロ定数 N_{A} には以下の関係がある。

$$R = kN_{\mathrm{A}} \tag{1}$$

$Z \equiv \dfrac{PV}{nRT}$ にて定義される圧縮因子 Z は，理想気体の場合に 1 となる。一方，不完全気体の圧縮因子 Z は，$\dfrac{n}{V}$ を用いたべき級数表現であるビリアル展開によって，次式で表わされる。

$$Z = 1 + \frac{n}{V}B(T) + \left(\frac{n}{V}\right)^2 C(T) + \left(\frac{n}{V}\right)^3 D(T) + \bullet\bullet\bullet \tag{2}$$

上式の $B(T)$，$C(T)$，$D(T)$ をそれぞれ第 2 ビリアル係数，第 3 ビリアル係数，第 4 ビリアル係数と言う。

I. 第 2 ビリアル係数 $B(T)$ は温度 T の関数であり，気体の分子間ポテンシャル $\phi(r)$ と以下の関係を有する。

$$B(T) = 2\pi N_{\mathrm{A}} \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\phi(r)}{kT}\right)\right] r^2 \,\mathrm{d}r \tag{3}$$

σ，ε_0 を正の定数として，気体の分子間ポテンシャル $\phi(r)$ が分子間距離 r に対して以下で与えられる場合，

$$r < \sigma \quad \text{の時} \quad \phi(r) = \infty \tag{4}$$

$$r \geq \sigma \quad \text{の時} \quad \phi(r) = -\varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \tag{5}$$

第 2 ビリアル係数 $B(T)$ を求めよ。この時，気相が維持される条件を利用して良い。

II. 不完全気体を表現する van der Waals の状態方程式は, 次式である。

$$\left(P+\frac{an^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n}-b\right)=RT \tag{6}$$

ここでパラメータ a, b は気体固有の正の定数である。上式をビリアル展開し, 第２ビリアル係数 $B(T)$ と第３ビリアル係数 $C(T)$ を求めよ。

III. I.と II.で導出された第２ビリアル係数 $B(T)$ を関係付けて, パラメータ a, b を導出せよ。

IV. パラメータ a, b および定数 σ, ε_0 について, それぞれの物理的な意味を説明せよ。

第 4 問

I. 図 4.1 のような階段状ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0: \text{領域 } 1) \\ -V_0 & (x \geq 0: \text{領域 } 2) \end{cases} \tag{1}$$

のもとで，エネルギーE，質量mの粒子が一次元運動している。ただし，$V_0 > 0$とする。いま，粒子が領域 1 から$x = 0$のポテンシャルの階段へ入射してきたとする。粒子の運動は Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} \text{領域 } 1 \quad -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} = E\psi_1(x) \\ \text{領域 } 2 \quad -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - V_0\psi_2(x) = E\psi_2(x) \end{cases} \tag{2}$$

に従う。ここで，$\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$はそれぞれ領域 1，領域 2 での粒子の波動関数，$\hbar = h/2\pi$ (hはプランク定数)である。

1. 入射粒子の波動関数をe^{ik_1x} $(k_1 > 0)$とする。粒子はポテンシャルの階段部分を透過するが，一部は反射する。領域 2 での粒子の波数をk_2とするとき，波動関数ψ_1，ψ_2をk_1，k_2を用いて表せ。k_1とE，k_2とEの関係も示すこと。
2. 粒子の反射率Rと透過率Tを求めよ。

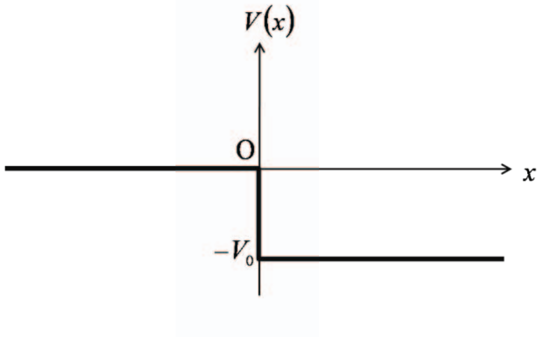

図 4.1

II.　図 4.2 のような井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0\text{: 領域 1}) \\ -V_0 & (0 \leq x \leq a\text{: 領域 2}) \\ 0 & (x > a\text{: 領域 3}) \end{cases} \tag{3}$$

のもとで，I.と同様に，エネルギーE，質量mの粒子が，領域 1 からポテンシャル井戸へ入射してきたとする。ただし，$V_0 > 0$，$a > 0$とする。また，入射粒子の波動関数をe^{ik_1x} $(k_1 > 0)$とする。

1.　領域 1 から領域 3 への粒子の透過率を求めよ。
2.　透過率が最大となる粒子のエネルギーを求めよ。
3.　透過率が最大となる粒子について，領域 1 における波数k_1を求め，井戸幅aと関連付けて，その物理的意味を簡単に説明せよ。

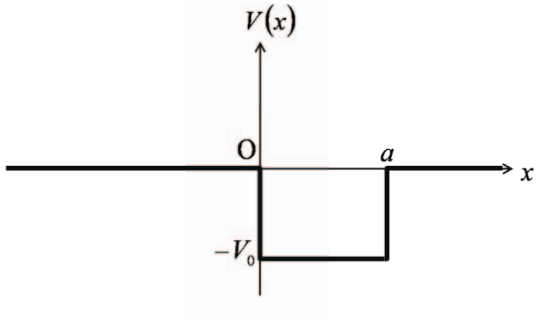

図 4.2