# 平 成 23 年 度

# 大学院入学試験問題

# 数　　学

午後１：00～３：30

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ６問のうち，任意の３問を選んで解答すること。
4. 解答用紙３枚が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある　くさび型マークのうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示にしたがい，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

| 受験番号 | No. |
|---|---|

上欄に受験番号を記入すること。

## 第 1 問

I. $n$を自然数とする不定積分$I_n$を次のように定義する。

$$I_n = \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx \tag{1}$$

ここで，$a$は0でない実定数とする。以下の問いに答えよ。

1. $I_{n+1}$を$I_n$をもちいた漸化式であらわせ。
2. $I_1$，$I_2$をそれぞれ求めよ。積分定数は省略せよ。
3. 次の不定積分を求めよ。積分定数は省略せよ。

$$\int \frac{4x^4+2x^3+10x^2+3x+9}{(x+1)\left(x^2+2\right)^2}\,dx \tag{2}$$

II. $u(x,t)$ についての偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を考える。$c$は正の定数とする。以下の問いに答えよ。

1. 独立変数 $\xi = x+ct$，$\eta = x-ct$ を用いて，与えられた方程式から $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ を導け。さらに，その一般解が $\phi$，$\varphi$を任意関数として式(3)で与えられることを示せ。

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\varphi(x-ct) \tag{3}$$

2. II. 1 で示した一般解について，初期条件を式(4)としたとき，解が式(5)で与えられることを示せ。

$$u(x,0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|_{t=0}=g(x) \tag{4}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\bigl(f(x+ct)+f(x-ct)\bigr)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds \tag{5}$$

3. 初期条件を式(6)としたときの解を求め，$t \geq 0$ における $u(x,t)$ の振る舞いの概略を図で説明せよ。ここで，$c_0$ は正の定数，$\delta(x)$ はデルタ関数である。

$$u(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right|_{t=0} = c_0 \delta(x) \qquad (6)$$

## 第 2 問

$\boldsymbol{A}$を$n\times n$の実対称行列，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&2&2\\2&7&0\\2&0&5\end{pmatrix}$ とする。以下の問いに答えよ。

I. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ を$\boldsymbol{x}$について解くことと，$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ の停留値を求めることが同じであることを示せ。ここで，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}$は$n$次元実数ベクトル，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$は既知であり，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$は$\boldsymbol{x}$の転置とする。

II. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{BD}=\begin{pmatrix}c_1&0&0\\0&c_2&0\\0&0&c_3\end{pmatrix}$ を満たす対角行列$\boldsymbol{C}$と$3\times3$の直交行列$\boldsymbol{D}$を求めよ。ただし，$c_1\geq c_2\geq c_3$，$\boldsymbol{D}$の 1 行目のすべての成分を正とする。

III. $k$を正の整数とし，$\begin{pmatrix}a_k\\b_k\\c_k\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^k\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ とする。$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}$ を求めよ。

IV. 実数$y_1$，$y_2$，$y_3$について，次の関数

$$f(y_1,y_2,y_3)=\frac{7y_1^2+8y_2^2+6y_3^2+4y_1(y_2+y_3)}{4y_1^2+4y_2^2+4y_3^2} \tag{1}$$

の最小値を求めることを考える。ただし，$y_1^2+y_2^2+y_3^2\neq0$ とする。II で求めた行列$\boldsymbol{D}$により $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{D}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ として定まる $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ を用いて $f(y_1,y_2,y_3)$ を表し，最小値を求めよ。

## 第 3 問

複素関数 $f(z)=\dfrac{\log(z+i)}{z^2+1}$ と $g(z)=\dfrac{\log(z-i)}{z^2+1}$ を考え，以下の問いに答えよ。ただし，$\log z=\log_e|z|+i\mathrm{Arg}(z)+2mi\pi$ （$-\pi<\mathrm{Arg}(z)\le\pi$，$m=0,\pm1,\pm2,\ldots$）である。また，$i$は虚数単位とし，$e$は自然対数の底とする。

I. 図 3.1 に示す半径$R$（$R>1$）の上半円周$\mathrm{C}_1$と直径$\mathrm{C}_2$からなる経路を反時計回りに一周する積分路Cについて，Cに囲まれる領域にある$f(z)$ の極とその留数を求めよ。

II. 積分 $\int_{\mathrm{C}} f(z)dz$ を求めよ。

III. 上半円周$\mathrm{C}_1$上（$z=Re^{i\theta}$，$0\le\theta\le\pi$，$R>1$）において次の不等式を示せ。

$$\left|\int_{\mathrm{C}_1}\frac{\log(z+i)}{z^2+i}dz\right|<\pi R\frac{\log_e(R+1)+\dfrac{3\pi}{2}}{R^2-1} \tag{1}$$

ただし，必要なら $\left|\log(Re^{i\theta}+i)\right|<\log_e(R+1)+\dfrac{3\pi}{2}$ を用いてよい。

IV. 図 3.2 に示す半径$R$（$R>1$）の下半円周$\Gamma_1$と直径$\Gamma_2$からなる経路を反時計回りに一周する積分路$\Gamma$について，積分 $\int_{\Gamma} g(z)dz$ を求めよ。

V. 次式を証明せよ。

$$\int_0^{\infty}\frac{\log_e(x^2+1)}{x^2+1}dx=\pi\log_e 2 \tag{2}$$

ただし，必要なら $\int_{\mathrm{C}_1} f(z)dz\xrightarrow[R\to\infty]{}0$ と $\int_{\Gamma_1} g(z)dz\xrightarrow[R\to\infty]{}0$ を用いてよい。

VI.　V の結果を用いて次の定積分を求めよ。

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log_e(\cos\theta)d\theta \tag{3}$$

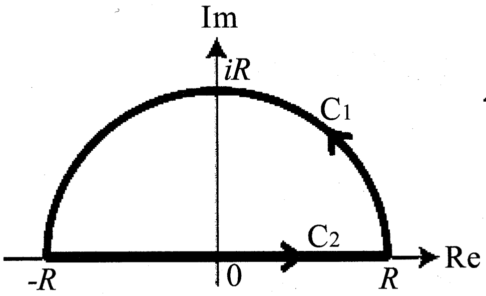


図 3.1

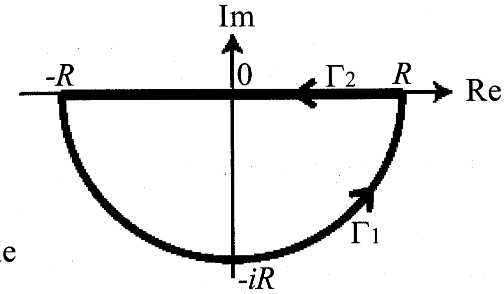


図 3.2

## 第 4 問

$xy$ 平面上に点 $\mathrm{A}(-1,0)$，点 $\mathrm{B}(1,0)$ および点 $\mathrm{P}(x,y)$ がある。距離 $\overline{\mathrm{AP}}$ と距離 $\overline{\mathrm{BP}}$ の積が一定値 $s\,(s>0)$ のとき，点Pの描く軌跡を曲線Cとする。以下の問いに答えよ。

I. $s=\dfrac{5}{4}$ および $s=\dfrac{3}{4}$ の場合の曲線Cの概形をそれぞれ描け。

II. 曲線C上で $y$ の取りうる最大値を $s$ の関数として求めよ。

III. $x\geq 0$ において，$s=1$ の場合の曲線Cで囲まれた領域Dを考える。

1. 領域Dが直線 $x=\sqrt{3}y$ によって2つに分割されるとき，2つの領域の面積をそれぞれ求めよ。
2. 領域Dを $x$ 軸の周りに回転してできる立体の表面積を求めよ。

## 第 5 問

関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)=L\left[f(t)\right]$ を

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

で定義する。ただし，$s$ は複素数，$t$ は実数でかつ $t\geq 0$ とする。

I. 関数 $u(t)$ を以下で定義する。ただし，$a$ は正の実数である。

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & t\leq a\\ 1 & t>a\end{cases} \tag{2}$$

1. $L\left[u(t-a)\right]$ を求めよ。

2. $L\left[f(t-a)u(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$ を示せ。

3. ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解け。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)=u\left(t-2\right)-u\left(t-5\right) \tag{3}$$

ただし，$t=0$ で $x=0$ かつ $\dfrac{dx}{dt}=0$ である。

II. 関数 $g(t)$ が $0\leq t\leq T$ で与えられている。ただし，$g(0)=g(T)=0$ とする。この時，$t\geq 0$ に対して関数 $h(t)$ を以下のように定義する。ただし，$n$ は $0\leq t-nT\leq T$ を満たす整数とする。

$$h(t)=\left(-1\right)^n g\left(t-nT\right) \tag{4}$$

この時 $h(t)$ のラプラス変換は，$s$ の関数 $A\left(s\right)$ を用いて，

$$L\left[h(t)\right]=A\left(s\right)\int_0^T g\left(t\right)e^{-st}dt \tag{5}$$

と表せる。$A\left(s\right)$ を求めよ。

## 第 6 問

あるコロニーに生息するアリの数 $N$ 匹を，2 回の捕獲によって推定する。1 回目の捕獲では，捕獲数が $n_1$ 匹であり，そして，捕獲したすべてのアリにマーキングをして放した。2 回目の捕獲では，捕獲数が $n_2$ 匹で，そのうち $m$ 匹 $(m \neq 0)$ にマーキングが認められた。ただし，2 回の捕獲は同じアリの母集団からの無作為抽出であり，捕獲とマーキングはアリの行動には影響しない。

I. 2 回目の捕獲で，マーキングされたアリが $m$ 匹含まれる組合せの数を求めよ。

II. 2 回目の捕獲で，マーキングされたアリが $m$ 匹含まれる確率 $P_m(N)$ を $N, n_1, n_2, m$ を用いて表せ。

III. $P_m(N) \geq P_m(N+1)$ を満たす $N$ の条件を求めよ。

IV. $P_m(N)$ は $N$ に関して最大値を持つことを既知として，$P_m(N)$ を最大とする $N$ を $n_1, n_2, m$ を用いて表せ。