

2021 年度

大学院入学試験問題

数学 1 (主に微分積分・微分方程式)

問題番号 M1

解答時間 40 分

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題文を見ないこと。
2. 解答用紙 6 枚および下書用紙 2 枚を使用すること。
3. 解答用紙および下書用紙の裏面の使用は禁止する。
4. すべての解答用紙および下書用紙の上方の指定された箇所に、受験番号を忘れずに記入すること。
5. 日本語または英語で解答すること。
6. 解答は解答用紙の実線の枠内に記入すること。
7. 解答に関係のない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
8. 日本語の問題文は 3-4 ページ、英語の問題文は 5-6 ページに書かれている。
9. 問題文のスクロール、拡大および縮小はしてよい。キーボード操作は禁止する。

- 解答には結果だけでなく導出過程も含めること。
- ネットワークトラブルが生じた場合でも解答を続けること。

2021

The Graduate School Entrance Examination
Mathematics 1 (Primarily from the fields of Differential
and Integral Calculus, Differential Equations)

Problem Number M1

Answer Time 40 minutes

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not look at the Problems until the start of the examination has been announced.
2. Use 6 Answer Sheets and 2 Draft Sheets.
3. Do not use the back faces of the Answer Sheets or the Draft Sheets.
4. Fill in your examinee number in the designated places at the top of all the Answer Sheets and the Draft Sheets.
5. Answers must be written in Japanese or English.
6. Answers must be marked within the solid frame on the Answer Sheets.
7. Any Answer Sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
8. The Problems are described in Japanese on pages 3-4 and in English on pages 5-6.
9. Scrolling, expansion and reduction of the Problems are permitted. Keyboard operation is prohibited.

- Show the derivation processes as well as the results.
- Continue the answer even if network trouble occurs.

数学 1 (主に微分積分・微分方程式)

問 I, II の両方に答えよ。ただし, x は実変数とする。

I. 以下の問いに答えよ。

1. $0 < x < 1$ で定義された以下に示す実関数 $y(x)$ について, 導関数 $\frac{dy(x)}{dx}$ を求めよ。

$$y(x) = (\arccos x)^{\log x} \quad (1)$$

ここで, $0 < \arccos x < \pi/2$ とする。

2. 次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - px^2} dx \quad (2)$$

ここで, p は実定数である。

3. 次の定積分 I を計算せよ。

$$I = \int_0^{\sin \theta} \frac{\arctan(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (3)$$

ここで, $0 < \theta < \pi/2$ とする。

次のページに続く。

II. 複素数値関数 $p(x)$, $q(x)$ に関する以下の連立常微分方程式

$$\frac{dp(x)}{dx} = -ibq(x) \exp(-2iax) \quad (4)$$

$$\frac{dq(x)}{dx} = -ibp(x) \exp(2iax) \quad (5)$$

について考える。ただし、 i は虚数単位であり、 a , b は実定数である。以下の問いに答えよ。

1. $f(x) = p(x) \exp(iax)$, $g(x) = q(x) \exp(-iax)$ という変数変換により複素数値関数 $f(x)$, $g(x)$ に関する連立常微分方程式を導出せよ。
2. $|f(x)|^2 + |g(x)|^2$ の値が x に依存しないことを示せ。ただし、 $|A|$ は複素数 A の絶対値を表す。
3. $a = 0.8$, $b = 0.6$ とする。 $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ という初期値で、問 II.1 で導出した連立常微分方程式を解き、 $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

Mathematics 1 (Primarily from the fields of Differential and Integral Calculus, Differential Equations)

Answer both Questions I and II, where x is a real variable.

I. Answer the following questions.

1. Find the derivative $\frac{dy(x)}{dx}$ of the following real function $y(x)$ defined for $0 < x < 1$:

$$y(x) = (\arccos x)^{\log x}, \quad (1)$$

where $0 < \arccos x < \pi/2$.

2. Calculate the following indefinite integral:

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - px^2} dx, \quad (2)$$

where p is a real constant.

3. Calculate the following definite integral:

$$I = \int_0^{\sin \theta} \frac{\arctan(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (3)$$

where $0 < \theta < \pi/2$.

Continued on the next page.

II. Consider that complex-valued functions $p(x)$ and $q(x)$ satisfy the simultaneous ordinary differential equations below:

$$\frac{dp(x)}{dx} = -ibq(x) \exp(-2iax), \quad (4)$$

$$\frac{dq(x)}{dx} = -ibp(x) \exp(2iax). \quad (5)$$

Here, i is the imaginary unit, and a and b are real constants. Answer the following questions.

1. Derive the simultaneous ordinary differential equations for complex-valued functions $f(x)$ and $g(x)$, based on the change of variables $f(x) = p(x) \exp(iax)$ and $g(x) = q(x) \exp(-iax)$.
2. Show that the value of $|f(x)|^2 + |g(x)|^2$ is independent of x , where $|A|$ denotes the absolute value of a complex number A .
3. Let $a = 0.8$ and $b = 0.6$. Solve the simultaneous ordinary differential equations derived in Question II.1 using the initial values $f(0) = 1$ and $g(0) = 0$, and obtain $f(x)$ and $g(x)$.