平成31年度

大学院入学試験問題

数　学

午後１：00～３：30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ６問のうち，任意の３問(社会基盤学専攻，システム創成学専攻，原子力国際専攻及び技術経営戦略学専攻の受験者は２問)を選んで解答すること。
4. 解答用紙３枚(社会基盤学専攻，システム創成学専攻，原子力国際専攻及び技術経営戦略学専攻の受験者は２枚)が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることとなる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

I.　以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=x^3 \tag{1}$$

II.　以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$x^2\frac{dy}{dx}-x^2y^2+xy+1=0 \tag{2}$$

ただし，$y=\dfrac{1}{x}$ が特解であることを用いてよい。

III.　非負の整数nに対して，I_nを以下のように定義する。

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx \tag{3}$$

1.　I_0，I_1，I_2を計算せよ。
2.　$n\geq 2$のとき，I_nを計算せよ。

第 2 問

I. 行列$\boldsymbol{P}$が次のように与えられるとき，以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. $\boldsymbol{P}$のすべての固有値と，対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ。

2. $\boldsymbol{P}^2$，$\boldsymbol{P}^3$ を求めよ。

II. 実行列$\boldsymbol{A}$は次のようにブロック対角行列で表される。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ある正の整数mが存在して$\boldsymbol{A}^m$ が単位行列となるために，a，b，c，d，eが満たすべき必要十分条件を簡潔に表せ（証明は必要ない）。

III. $\boldsymbol{M}$は 0 と 1 のみを要素に持つ 12 次正方行列であり，各行各列に 1 となる成分がただ 1 つ存在すると仮定する。 $\boldsymbol{M}^k$が単位行列となる正の整数kのうち最小のものをk_0とする。考えうる全ての$\boldsymbol{M}$に対するk_0の最大値を求めよ（証明は必要ない）。

第 3 問

以下で z は複素数，i は虚数単位を表す。また，$\mathrm{Re}(z)$ と $\mathrm{Im}(z)$ はそれぞれ z の実部と虚部を表す。

I. 以下の問いに答えよ。

1. $z^5 = 1$ の解を極形式で求めよ。また,それらを複素平面上に図示せよ。
2. f: $z \mapsto f(z) = \exp(iz)$ により写像 f を定義する。
   領域 $D = \{z\text{: } \mathrm{Re}(z) \geq 0,\ 1 \geq \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ の f による像を複素平面上に図示せよ。
3. 関数$z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ の $z = 0$ における留数を求めよ。

II. a を正の実数とする。複素関数 $f(z) = \frac{(\log z)^2}{(z+a)^2}$ と,図 3.1 に示す閉経路 $C = C_+ + C_R + C_- + C_r$ $(R > a > r > 0)$ について考える。ただし $\log z$ は C_+ 上で主値をとるものとする。以下の問いに答えよ。

1. 留数定理を用いて線積分 $\oint_C f(z)\, dz$ を計算せよ。
2. 問 II.1 の結果を用いて,積分$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+a)^2} dx$ の値を計算せよ。

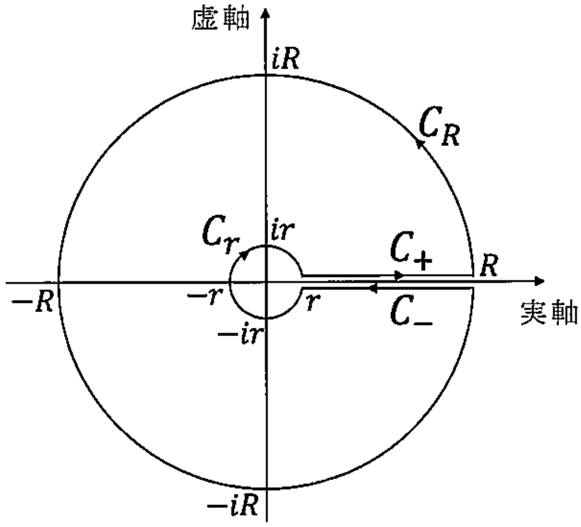

図 3.1

第 4 問

3 次元 xyz 直交座標系における図形に関して以下の問いに答えよ。

I. $x^2+2y^2-z^2=0$で表される曲面 S_1 を考える。
曲面 S_1 上の点 A (2, 0, 2)における法線および接平面 T を x,y,z の方程式として求めよ。

II. 媒介変数 u,v を用いて次の式で表される曲面 S_2 を考える。

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cosh u\cos v & (1) \\ y=\dfrac{1}{2}\cosh u\sin v-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sinh u & (2) \\ z=\dfrac{1}{2}\cosh u\sin v+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sinh u & (3) \end{cases}$$

ただし，u,v は実数とし，$0\leq v<2\pi$とする。
曲面 S_2 を x 軸まわりに角度$-\pi/4$だけ回転させた曲面を S_3 とする。
ただし，正の回転の向きは，図 4.1 に示すyz 平面の円弧状の矢印の向きとする。

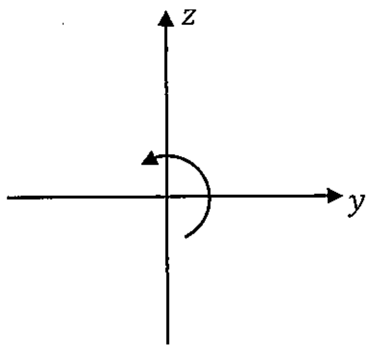

図 4.1

以下の問いに答えよ。

1. x 軸まわりに角度$-\pi/4$だけ図形を回転させる 1 次変換を表す行列 $\boldsymbol{R}$ を求めよ。
2. 曲面 S_3 を x,y,z の方程式として求めよ。
3. 曲面 S_2 を x,y,z の方程式として求めよ。

III. 問 II.2 で求めた曲面 S_3 と 2 つの平面 $z=1$ および $z=-1$ で囲まれる立体 V を考える。以下の問いに答えよ。

1. 立体 V の xz 平面における断面の面積を求めよ。
2. 立体 V の問 I で求めた平面 T における断面の面積を求めよ。

第 5 問

実数xを変数とする連続微分可能な関数$f(x)$を考える。$|x| \to \infty$で$f(x) \to 0$ とする。$f(x)$，その導関数 $f'(x)$，および $xf(x)$ は絶対積分可能であるとする。このとき，$f(x)$ のフーリエ変換を $\mathcal{F}\{f(x)\}(u)$ あるいは $\hat{f}(u)$ として表し，以下の式で定義する。

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(u) = \hat{f}(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iux) dx \tag{1}$$

ただし，uは実数の変数，iは虚数単位とする。他の関数のフーリエ変換も同様に定義する。

I. $\hat{f}(u)$ および u を用いて，$\mathcal{F}\{f'(x)\}(u)$ を表せ。

II. $\mathcal{F}\{xf(x)\}(u)$ を用いて，$\dfrac{d\hat{f}(u)}{du}$ を表せ。

III. aを正の実定数$(a > 0)$として$f(x) = \exp(-ax^2)$とする。$f(x)$について以下の関係式が成り立つ。

$$f'(x) = -2axf(x) \tag{2}$$

式(2)の両辺をフーリエ変換すると，$\hat{f}(u)$についての 1 階の常微分方程式を得る。この常微分方程式を解くことで$\hat{f}(u)$を求めよ。ただし，常微分方程式の積分定数は，式(1)と以下の広義積分の値を用いて，$\hat{f}(0)$を計算することで求めることができる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{3}$$

IV. 実数xとtを変数とする関数$h(x,t)$を考える。$h(x,t)$は$-\infty < x < \infty$，$t \geq 0$の範囲で定義され，次の偏微分方程式を満足する。

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \qquad (t > 0) \tag{4}$$

ただし，初期条件は次の式で与えられる。

$$h(x,0) = \exp(-ax^2) \qquad (a > 0) \tag{5}$$

1. 偏微分方程式(4)の両辺を変数xについてフーリエ変換し，
$\hat{h}(u,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,t)\exp(-iux)dx$ に関して，変数 t を独立変数とする常微分方程式を求めよ。
2. 問 IV.1 で求めた常微分方程式を解いて，$\hat{h}(u,t)$を求めよ。
3. 変数uについてのフーリエ逆変換を用いて，式(4)と式(5)を満たす $h(x,t)$ を求めよ。

V. 連続な関数$g(x)$とそのフーリエ変換$\hat{g}(u)$を考える。$|x| \to \infty$ で $g(x) \to 0$ とし，$g(x)$ は絶対積分可能とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ のたたみ込みを以下の式で定義する。

$$(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \tag{6}$$

1. $\hat{f}(u)$ および $\hat{g}(u)$を用いて，$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\}(u)$を表せ。
2. 関数$h(x,t)$は，初期条件を$h(x,0) = g(x)$として，式(4)を満たすものとする。問 V.1 の結果を利用して，$h(x,t)$を積分の形で表せ。ただし，$t > 0$とする。

第 6 問

0または1の値を取る n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がある。ただし，n は 4 以上の整数であり，$P(A)$ は事象A が成り立つ確率，$P(A|B)$ は事象 B が成り立つ条件のもとで事象A が成り立つ条件付き確率を表すとする。また，$A \wedge B$は事象Aと事象Bの積事象を表す。以下の問いに答えよ。

I. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立であるとする。X_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ は，それぞれが確率 p で値1を取り，確率$1 - p$ で値0を取る。
すなわち，$P(X_k = 1) = p$ ，$P(X_k = 0) = 1 - p$ である。

1. $X_1, X_2, \cdots, X_n$の総和の期待値および総和の分散を求めよ。
2. 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を順に並べてつくった列 $X_n \cdots X_2 X_1$ をn 桁の 2 進数とみなすことで得られる整数を Y とする。たとえば，$n = 4$ とし，列 $X_4 X_3 X_2 X_1$ が0101 のとき $Y = 5$ となり，列 $X_4 X_3 X_2 X_1$ が1101 のとき $Y = 13$ となる。このとき，Y は 0 から $2^n - 1$ までの整数の値を取る確率変数となる。Y の期待値と分散を求めよ。

II. 確率変数$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の値が以下のように順番に決まる場合を考える。最初に X_1 は確率p で値1，確率$1 - p$ で値0を取る。
続いて$k = 2, 3, \cdots, n$ について，X_k は確率 q で X_{k-1} と同じ値，確率 $1 - q$ で X_{k-1} と異なる値を取るとする。すなわち，
$P(X_k = 1 | X_{k-1} = 1) = P(X_k = 0 | X_{k-1} = 0) = q$,
$P(X_k = 1 | X_{k-1} = 0) = P(X_k = 0 | X_{k-1} = 1) = 1 - q$ である。

1. $P(X_k = 1)$ を r_k で表す。ここで k は 1 から n までの整数である。r_k についての漸化式を導け。さらにこの漸化式を解いて r_k をp ，q ，k を用いて表せ。
2. 確率 $P(X_1 = 1 \ \wedge \ X_2 = 0 \ \wedge \ X_3 = 1 \ \wedge \ X_4 = 0)$ を求めよ。
3. 確率 $P(X_3 = 1 \ | \ X_1 = 0 \ \wedge \ X_2 = 1 \ \wedge \ X_4 = 1)$ を求めよ。