平成31年度

大学院入学試験問題

物理学

午後 1：00 ～ 3：00

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 4問のうち，任意の2問を選んで解答すること。
4. 解答用紙2枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，正しく切り取ること。したがって，解答用紙1枚につき2ヶ所切り取ることとなる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

I. 図 1.1 に示すような，支点Oを中心に摩擦なく回転できる質量 M，半径 a の密度が一様な滑車を考える。この滑車に質量 m_1 の重り 1 と質量 m_2 の重り 2 を糸で吊るし，静かに離した。初期状態では滑車および重りは静止しているとする。重力加速度を g， $m_2 > m_1$ とする。また，糸の質量，太さ，伸び，および重りの大きさは無視でき，滑車と糸の間にすべりはないとする。以下の問いに答えよ。

1. 滑車の支点Oまわりの慣性モーメントを求めよ。またその導出過程も示せ。
2. 時刻 $t=0$ に重りを離した。重り 1 の y 方向の速度を時間 t の関数として求めよ。

II. 図 1.2 に示すように，質量 M，外径 $2a$，内径 a の円筒が中心軸まわりに角速度 ω_0 で回っている。この円筒を静かに粗い水平面に置いた時の運動について考える。以下の問いに答えよ。ここで，円筒は密度が一様な剛体，円筒と面の動摩擦係数を μ，重力加速度を g とする。また円筒が水平面上ですべらずに転がる際のエネルギー損失は無視できるものとする。

1. 円筒の中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。またその導出過程も示せ。
2. 時刻 $t=0$ に円筒を面上に置いた後，円筒はすべりながら転がり始めた。円筒がすべりながら転がっている間の，円筒の重心の速度および重心回りの角速度を，時間 t の関数として求めよ。
3. 円筒がすべらずに転がり始めるまでに要する時間 t_1 および距離 x_1 を求めよ。
4. 距離 x_1 より離れた位置に水平面となす角 θ の粗い斜面がある。円筒がこの斜面をすべらず転がり上がるとき，到達できる高さを求めよ。ただし，θ は十分に小さく円筒は接触を保ちつつ水平面上から斜面上に移動できるものとする。

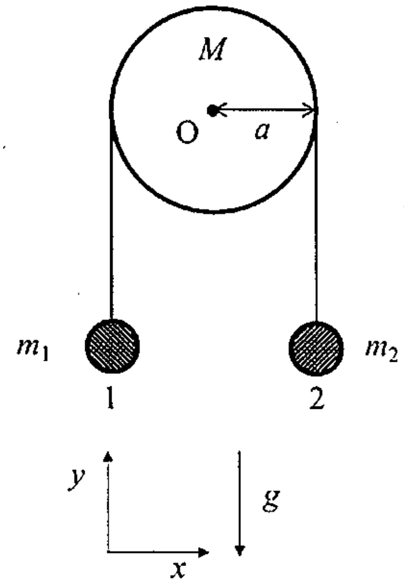

図 1.1

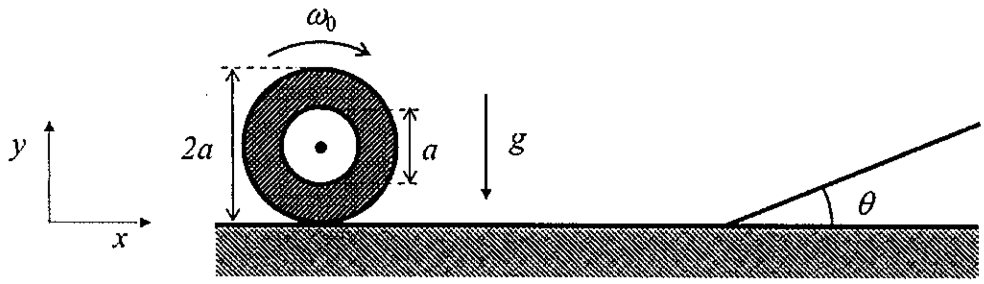

図 1.2

第 2 問

真空中で電荷や磁化または電流が誘起する電場や磁場について考える。真空中の誘電率および透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0 とする。また，重力は無視するものとする。以下の問いに答えよ。

I. 図 2.1 のように，xy 平面内に内半径 a，外半径 b の穴の開いた円板が置かれている。この円板に電荷が一様な面密度 $-\sigma\ (\sigma > 0)$ で分布している。円板の中心を原点 O とする。

1. z 軸上の点 $\mathrm{P}(0,0,z)$ における電位と電場を求めよ。
2. I.1 で求めた電場が，$z \gg b$ の場合にどのように表されるかを示し，その物理的意味を簡潔に述べよ。
3. I.1 で求めた電場が，$a \to 0,\ b \to \infty$ としたときには，無限に広い平面上に広がった一様な電荷がつくる電場と一致することを示せ。
4. 原点から十分に離れた点 $\mathrm{C}(0,0,c)\ (c > 0)$ に，負電荷 $-q\ (q > 0)$ と質量 m をもつ粒子を置き初速度 $\overrightarrow{v_0} = (0,0,-v_0)\ (v_0 > 0)$ を与えた。この後，粒子が原点に最も近づくときの粒子の z 座標を求めよ。ただし，v_0 は十分に小さく，この粒子の運動中の位置の z 座標を z_c とすると，常に $z_c \gg b$ の条件が成り立つものとする。また，十分に時間が経過した後（すなわち時間 $t \to \infty$ としたとき），この粒子の速度はある速度 $\overrightarrow{v_c}$ に収束する。この速度 $\overrightarrow{v_c}$ を求めよ。
5. 原点付近の点 $\mathrm{D}(0,0,d)\ (d \approx 0)$ に正電荷 $q\ (q > 0)$ と質量 m をもつ粒子を置き静かに離した。このとき粒子はどのような運動をするのかを説明し，その運動の周期を求めよ。ただし，この粒子の運動による電磁波の放出は無視する。

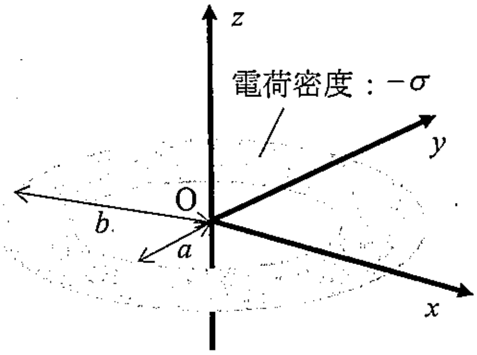

図 2.1

II.　真空中に置かれた内半径a，外半径b，厚さtで矩形断面を有する円筒形の磁性体を考える。

1.　図 2.2 のように，この円筒形の磁性体が中心軸と平行に大きさMで一様に磁化されているとする。このとき，磁性体のどの部分に磁化電流（磁化を生じさせている電流）が流れるか，その方向を含めて説明せよ。
2.　図 2.3 のように，この円筒形の磁性体が円周方向に沿って一様に大きさMで磁化されているとする。このとき，磁性体内外において生じる磁場と磁束密度を求めよ。
3.　図 2.4 のように，この円筒形の磁性体に一本の導線を一様に巻き付けて（総巻き数：N），環状ソレノイドを作った。この環状ソレノイドに一定電流Iを流すときに磁性体断面を貫く全磁束を求めよ。ただし，磁性体は電流を流す前は磁化していないものとし，磁束の漏れは無視できるものとする。また，磁性体の透磁率をμとする。
4.　この環状ソレノイドにおいて，磁束密度と磁化が磁性体内で一様であるとみなせるとする。環状ソレノイドの平均円周を$2\pi(a+b)/2$として，この一様な磁束密度と磁化の大きさを求めよ。また，内半径が内外半径差に比べ十分に大きいとき（$a \gg b-a$），この平均円周を用いて得た磁束密度が，II.3 で求めた全磁束の式において$a \gg b-a$とし，かつ磁束密度が一様とみなしたときに得られる磁束密度と一致することを示せ。必要なら$|x| \ll 1$の条件で，$\ln(1+x) \approx x$の近似を用いてもよい。

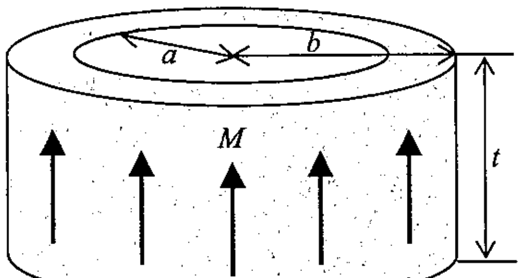

図 2.2

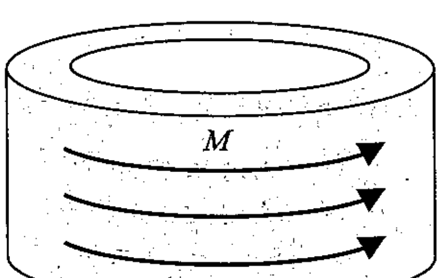

図 2.3

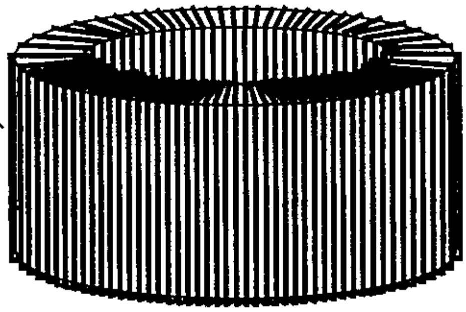

図 2.4

第 3 問

I. 熱力学第 1 法則は以下のように表現できる。

$$d'Q + d'W = dU \tag{1}$$

ここで，Qは外部から入った熱量，Wは外部から加えられた仕事，Uは内部エネルギーである。また，定積モル比熱C_Vは，以下のように記述できる。

$$C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{2}$$

ただしn，V，Tはそれぞれ物質量（モル数），体積，温度である。また，圧力をP，定圧モル比熱をC_Pと置く。以下の問いに答えよ。

1. 理想気体の準静的断熱過程において，

$$nC_V dT + PdV = 0 \tag{3}$$

が成立することを示せ。

2. 式(3)を利用して，理想気体の準静的断熱過程において，

$$TV^{\gamma-1} = 一定 \tag{4}$$

が成立することを示せ。ただし，γは比熱比（$\gamma = C_P / C_V$）である。理想気体において，C_PとC_Vの間には$C_P - C_V = R$（R: 気体定数）の関係が成立することを利用してよい。

II. nモルの理想気体を一定の断面積Zを持つシリンダに封入し，図 3.1 の A→B→C→D→A の過程で準静的に変化させた。ただしP，V，Tはそれぞれ圧力，体積，温度である。A→B，C→D は等温過程であり，B→C，D→A は断熱過程である。状態 A，B，C，D における気体の（体積，温度）は，それぞれ(V_1，T_1)，(V_2，T_1)，(V_3，T_2)，(V_4，T_2)である。断熱過程および等温膨張においてはシリンダ―ピストン間の摩擦は

無視できるが，等温圧縮させるとき（C→D）のみ，図 3.2 のようにシリンダーピストン間に一定の大きさ f の摩擦力が働くとする。その際，摩擦力による仕事は，すべて封入された理想気体に吸収される。気体定数を R とし，以下の問いに答えよ。

1. 過程 A→B において気体が受け取った熱量 $Q_1(>0)$ を求めよ。
2. 過程 C→D において気体が受け取った熱量 $Q_2(<0)$ を求めよ。
3. 過程 A→B→C→D→A における効率 η （$\eta=(Q_1+Q_2)/Q_1$）を n，R，f，Z，T_1，T_2，V_3，V_4 を用いて表せ。

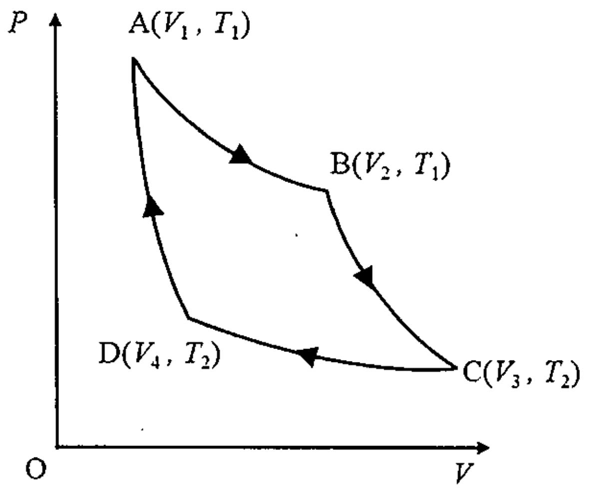

図 3.1

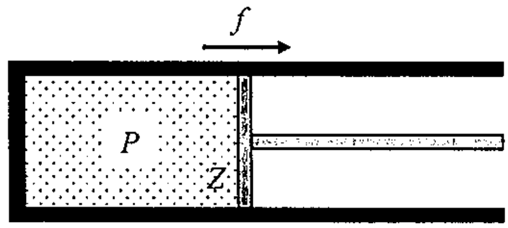

図 3.2

III. 反応による体積変化が無視でき，仕事が電荷のみによって行われる可逆電池がある。起電力を E，電荷を q とおくと，電荷によって電池が外部にする仕事は Edq と表される。可逆電池において，熱力学第 1 法則は以下のように記述できる。

$$dU = TdS - Edq \tag{5}$$

ここで，U は内部エネルギー，T は温度，S はエントロピーを表す。また，ヘルムホルツの自由エネルギー F の定義式は，

$$F = U - TS \tag{6}$$

と記述される。以下の問いに答えよ。

1. ヘルムホルツの自由エネルギーFと起電力E, エントロピーSの間に, 以下の関係式が成り立つことを示せ。Fが独立変数q, Tの関数で記述できることを利用してよい。

$$E = -\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_T \tag{7}$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_q \tag{8}$$

2. 内部エネルギーの変化について, 以下の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_T = -E + T\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_q \tag{9}$$

3. この可逆電池の起電力が以下のように表されたとする。

$$E = 0.49 + 0.0002T\ [\mathrm{V}] \tag{10}$$

300 K の定温環境において, この電池を 200 mA で 10 秒放電させたとき, 外部から電池に吸収される熱量を求めよ。放電時の電荷移動dqは, 電流値をI, 時間をtとおくと, $dq = It$と記述できる。ただし, 電池の放電時の温度変化や起電力変化は無視できるほど小さい。

第4問

加速度センサの原理について考える。図 4.1 に示すような中空の剛体箱の中に，質量 m の物体（質点と考えてよい）がバネ（自然長からの変位に比例した復元力が作用する要素：比例定数 k）とダッシュ・ポット（物体速度に比例した抵抗力を発生する要素：比例定数 c）により剛体箱と連結されている。箱や物体は回転せず，図の上下方向のみに運動しうるものとする。空間上の箱の座標を x，バネの自然長を原点とした物体の箱に対する相対座標を y とする。なお，時刻を t で表すとし，重力は考えないものとする。

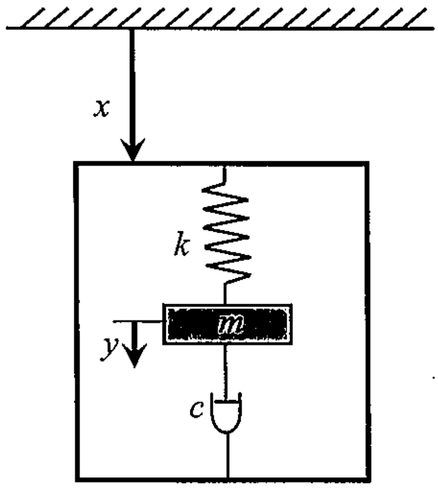

図 4.1

I. 物体にはたらく慣性力を m， x， y， t を用いて表せ。

II. 物体にはたらくバネの復元力は $-ky$，ダッシュ・ポットによる抵抗力は $-c\dfrac{dy}{dt}$ で表される。物体の運動方程式を示せ。

III. 剛体箱が $x=a\cos\omega t$ のように振幅 a，角周波数 ω で振動する場合を考える。定常応答のみを考えるとき，以下の問いに答えよ。

1. 物体の応答 y を $y = y_0 \cos(\omega t - \beta)$ の形で求めよ。ここで，y_0 および β を，以下で表される γ と μ，および a を用いて表せ。なお，$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とする。

$$\gamma = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \qquad (1)$$

$$\mu = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad (2)$$

2. $c = 0$ および $c = 2\sqrt{mk}$ のとき，それぞれの場合における y_0 と μ の関係を図示せよ。

3. ω が ω_0 に比べて十分大きいとき，y_0 と β はどのように近似されるか。また，これを利用して，物体の応答 y から剛体箱の応答 x を推定する方法を述べよ。

4. ω が ω_0 に比べて十分小さいとき，y_0 と β はどのように近似されるか。また，これを利用して，物体の応答 y から剛体箱の加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を推定する方法を述べよ。