平成30年度

大学院入学試験問題

数　学

午後１：00～３：30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ６問のうち，任意の３問(社会基盤学専攻，システム創成学専攻，原子力国際専攻及び技術経営戦略学専攻の受験者は２問)を選んで解答すること。
4. 解答用紙３枚(社会基盤学専攻，システム創成学専攻，原子力国際専攻及び技術経営戦略学専攻の受験者は２枚)が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることとなる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

I. 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

1. $$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-3y=e^x\cos x \qquad (1)$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x^2}y=\left(\frac{2\log x}{x}\right)^2 \qquad (2)$$

II. 式(3)で与えられる偏微分方程式および境界条件の式(4)〜(7)について，以下の問いに答えよ。

$$\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}=0 \qquad (0\le x,\ 0\le y\le 1) \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}u(x,y)=0 & (4)\\ \left.\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=0 & (5)\\ u(x,1)=0 & (6)\\ \left.\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0}=1+\cos\pi y & (7)\end{cases}$$

1. 式(3)と式(4)を満たす解を， $u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$ の形で求めよ。
2. 問 II.1 の解のうち，式(5)と式(6)を満たす解を求めよ。
3. 問 II.2 の解を用いて，全ての境界条件の式(4)〜(7)を満たす偏微分方程式(3)の解を求めよ。

第 2 問

I. λが正則行列$\boldsymbol{P}$の固有値であるとき，以下のことを示せ。

1. λは 0 ではない。
2. λ^{-1}は$\boldsymbol{P}^{-1}$の固有値である。また，正の整数nに対してλ^nは$\boldsymbol{P}^n$の固有値である。

II. $\boldsymbol{P}$は直交行列であるとする。$\boldsymbol{P}$を用いて次の対称行列$\boldsymbol{A}$を対角化できるとき，$\boldsymbol{P}$を求めよ。また，対角化された行列も求めよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

III. 行列$\boldsymbol{P}$とベクトル$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{x}$が次のように与えられるとき，以下の問いに答えよ。ただし，p，q，rは互いに異なる 0 でない実数とする。

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & p^2 & p^3 \\ q & q^2 & q^3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. $\boldsymbol{P}$が正則行列であるために，p, qが満たすべき条件を求めよ。
2. $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}$がただ一つの解をもつとき，$\boldsymbol{x}$を求めよ。ただし，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$は$\boldsymbol{P}$の転置行列である。

IV. 行列$\boldsymbol{P}_n$が次のようなn次（$n\geq 2$）の正方行列で与えられるとき，以下の問いに答えよ。ただし，p，qは互いに異なる実数とする。

$$\boldsymbol{P}_n=\begin{pmatrix} p+q & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p & p+q & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & p & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & q & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & p+q & q \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p & p+q \end{pmatrix}$$

1. $\boldsymbol{P}_n$の行列式$|\boldsymbol{P}_n|$が満たす漸化式を導出せよ。
2. 問 IV.1 の漸化式から行列式$|\boldsymbol{P}_n|$を，p，q，nを用いて表せ。

第 3 問

z平面（$z=x+iy$）上で定義された複素関数について，以下の問いに答えよ。ただし，iは虚数単位とする。

I. 関数$f(z)=\dfrac{z}{(z^2+1)(z-1-ia)}$について，以下の問いに答えよ。ただし，$a$は正の実数とする。

1. $f(z)$の極とその留数を全て求めよ。
2. 留数定理を用いて，次の定積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+1)(x-1-ia)}dx \tag{1}$$

II. 関数$g(z)=\dfrac{z}{(z^2+1)(z-1)}$を考える。また，半径$R$の上半円周$C_1$（$z=R\,e^{i\theta}$，$0\le\theta\le\pi$），実軸上の線分$C_2$（$z=x$，$-R\le x\le 1-r$），$z=1$を中心とする下半円周$C_3$（$z=1-r\,e^{i\theta}$，$0\le\theta\le\pi$），実軸上の線分$C_4$（$z=x$，$1+r\le x\le R$）からなる経路を反時計回りに一周する積分路$C$を考える。ただし，$e$は自然対数の底とし，$r>0$，$r\neq\sqrt{2}$，$R>1+r$とする。$0<r<1$の場合の例を図 3.1 に示す。以下の問いに答えよ。

1. 積分$\int_C g(z)dz$を求めよ。
2. 問 II.1 の結果を用いて，以下の値を求めよ。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-\infty}^{1-\varepsilon}g(x)dx+\int_{1+\varepsilon}^{\infty}g(x)dx\right] \tag{2}$$

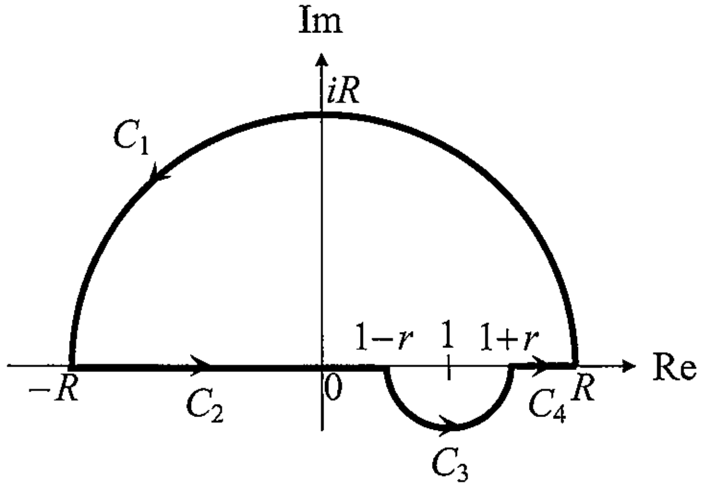

図 3.1

第 4 問

I. 3 次元直交座標系 xyz において，媒介変数 u，v を用いて次の式で表される曲面を，それぞれ媒介変数を含まない式で示したうえで，概形を図示せよ。ただし，a，b，c は 0 でない実定数とする。

1. $x = au\cosh v$， $y = bu\sinh v$， $z = u^2$
2. $x = a\dfrac{u-v}{u+v}$， $y = b\dfrac{uv+1}{u+v}$， $z = c\dfrac{uv-1}{u+v}$

II. 3 次元直交座標系 xyz において，次式で表される曲面 S について，以下の問いに答えよ。ただし，a，b は実定数とする。

$$z = x^2 - 2y^2 + ax + by \tag{1}$$

1. 曲面 S 上の点 (x, y, z) における法線ベクトルを求めよ。
2. 曲面 S を z 軸まわりに角度 $\pi/4$ だけ回転させた曲面を T とする。曲面 T を表す式を求めよ。ただし，正の回転の向きは，z 軸正側から原点を見たとき反時計回りとする。
3. 曲面 S 上の $-1 \le x \le 1$，$-1 \le y \le 1$ を満たす領域を，曲面 S' とする。曲面 S' を yz 平面へ投影したときの面積を求めよ。
4. $a = b = 0$ のとき，曲面 S' の縁の長さを求めよ。
5. $a = b = 0$ のとき，曲面 S 上の点 $\left(0, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}\right)$ における，ガウス曲率を求めよ。

第 5 問

$f(t)$を周期T ($T>0$) の周期関数$f(t+T)=f(t)$とする。この関数を次のように複素フーリエ級数に展開したとき，以下の問いに答えよ。

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\exp(-i\omega_n t) \tag{1}$$

ただし，iを虚数単位，tは実数とする。

I. ω_nをT，nを用いて表せ。

II. Mを正の整数定数，$\delta(t)$をデルタ関数とし，

$$\hat{f}(t)=\sum_{m=0}^{M-1}f(t)\delta(t-m\Delta t),\quad \Delta t=\frac{T}{M} \tag{2}$$

とする。kを任意の整数として，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\varepsilon}^{T-\varepsilon}\hat{f}(t)\exp(i\omega_k t)\,dt \tag{3}$$

を，F_n ($n=-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,\infty$) を用いて表せ。

III. Δtを問 II で与えたものとする。$F_n=0$ ($n<0$ または$n\geq M$) としたとき，F_j ($j=0,1,2,\cdots,M-1$) を

$$f(0),\ f(\Delta t),\ f(2\Delta t),\cdots,\ f((M-1)\Delta t)$$

を用いて表せ。

IV. $f(l\Delta t)=(-1)^l$ ($l=0,1,2,\cdots,M-1$) であるとき，問 III におけるF_jを求めよ。

第 6 問

n 人の子供が一列に並んでいる。あなたは m 個のアメ玉を持っており，列の 1 番目の子供から順に 1 個か 2 個を配布していく。列の最後までアメ玉を配り終えるか，アメ玉が無くなった時点で配布を終了する。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，n，m は正の整数とする。

I. $n=m=4$ のとき，アメ玉の配り方は何通りあるか。

II. $m \geq 2n$ のとき，アメ玉の配り方は何通りあるか。

III. $n \geq m$ のとき，m 個のアメ玉の配り方の場合の数を X_m とする。X_m が満たす漸化式を求めよ。

IV. 問 III の漸化式から X_m を求めよ。

V. アメ玉の数よりも子供の人数の方が多い状況を考える。全ての配り方のうち，最後にアメ玉を 2 個配って終了する配り方の割合を $P(m)$ とする。このとき，m を大きくしていくと $P(m)$ はある値に収束する。その値を求めよ。

VI. $m \geq 2n$ の状況を考える。アメ玉の配布において，次のルールを加える。列の 1 番目の子供は，確率 1/2 で 1 個のアメ玉，確率 1/2 で 2 個のアメ玉をもらう。もし，ある子供が 1 個のアメ玉をもらった場合，その次の子供は確率 1/2 で 1 個のアメ玉，確率 1/2 で 2 個のアメ玉をもらう。もし，ある子供が 2 個のアメ玉をもらった場合，その次の子供は確率 3/4 で 1 個のアメ玉，確率 1/4 で 2 個のアメ玉をもらう。列の n 番目の子供が 2 個のアメ玉をもらう確率を求めよ。