平成30年度

大学院入学試験問題

物理学

午後1：00～3：00

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 4問のうち，任意の2問を選んで解答すること。
4. 解答用紙2枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，正しく切り取ること。したがって，解答用紙1枚につき2ケ所切り取ることとなる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

I. 図 1.1 に示すように，鉛直上向き $+z$ 方向に飛行しているロケットを考える。このロケットは，ガスをロケットに対して一定の相対速度 u で進行方向の逆向きに噴射することによって推進力を得る。ただし，重力や空気抵抗等の推進力以外の力が働かないと仮定する。以下の問いに答えよ。

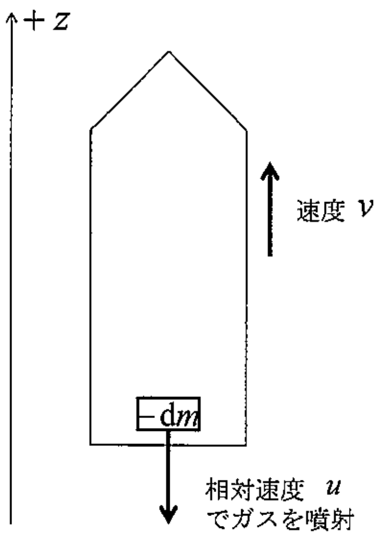

図 1.1

1. 時刻 t から $t+\mathrm{d}t$ の微小時間 $\mathrm{d}t$ の間にガスを噴射し，ロケットの質量が m から $m+\mathrm{d}m$（ただし $\mathrm{d}m<0$）に変化し，ロケットの速度が v から $v+\mathrm{d}v$ に変化したとする。時刻 t におけるロケットの運動量は，微小時間 $\mathrm{d}t$ 後の時刻 $t+\mathrm{d}t$ におけるロケットの運動量とロケットから噴射されたガス（質量 $-\mathrm{d}m\ (>0)$）の運動量の和に等しい。この時，$\mathrm{d}v, \mathrm{d}m, m, u$ の間に成り立つ関係式を求めよ。ただし，$\mathrm{d}v\cdot\mathrm{d}m$ などの微小量の二次の項は無視してよい。
2. ロケットがガスを長時間噴射し続けて，質量が m_i から m_f まで減少した時のロケットの速度増加量を求めよ。

II. 問 I において，ロケットに鉛直下向き $-z$ 方向に重力加速度 g が働くとする。以下の問いに答えよ。

1. 微小時間 $\mathrm{d}t$ の間の運動量変化に着目し，ロケットの速度 v の時間変化率を t の関数として求めよ。ただし，ロケットのガスの単

位時間あたりの噴射質量は一定である，すなわち，kを正の定数として，以下の式(1)が成り立つとする。

$$m = m_i(1 - kt) \tag{1}$$

2. ロケットがガスを長時間噴射し続けて，質量がm_iからm_fまで減少し，ロケットの速度がv_iからv_fまで上昇したとする。v_fを求めよ。

III. 図 1.2 に示すように，大気中を鉛直上向き$+z$方向に飛行するロケットを考える。ロケットは，図 1.2 のzx面内のみを動くと仮定する。ロケットの機軸の鉛直上向き$+z$方向からの傾きをθとし，初期状態においてθはゼロではない微小な初期値を持つとする。ロケットには，ロケットの重心 G から機軸上にロケット前方に向かって距離ℓ_1の位置に，水平方向（$+x$方向）と垂直方向（$-z$方向）それぞれに力$L = K_L\theta$および$D = K_D\theta$が働く。ただし，K_LとK_Dは，正の定数とする。ロケット機軸の末端（G からロケット後方に向かって距離ℓ_2の位置）にはロケットエンジンが取付けられ，この末端に一定の大きさFの力を与えている。この力の方向は制御可能で，それによりロケットの機軸の方向を安定化させる。外力Fの機軸からの傾きを図 1.2 のようにδと定義する。重心 G を通りzx平面に垂直な軸まわりのロケットの慣性モーメントをIとし，時間変化はしないものとする。θとδは十分小さいとして，$\sin\theta \cong \theta, \sin\delta \cong \delta, \cos\theta \cong 1, \cos\delta \cong 1$と近似する。以下の問いに答えよ。

1. ロケットの重心周りの回転に関する運動方程式を立て，時間tに関するθの二階の微分方程式を求めよ。ただし，θ^2の項は無視すること。
2. $\delta = 0$の時，$|\theta|$が時間とともに増加することを示せ。
3. $\delta = \alpha\theta$となるようにδを制御する時，$t \to \infty$でθが 0 に収束するための定数αの条件を求めよ。
4. $\delta = \alpha\theta + \beta(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)$となるように$\delta$を制御する時，$t \to \infty$で$\theta$が 0 に収束するための定数$\alpha, \beta$の条件を求めよ。

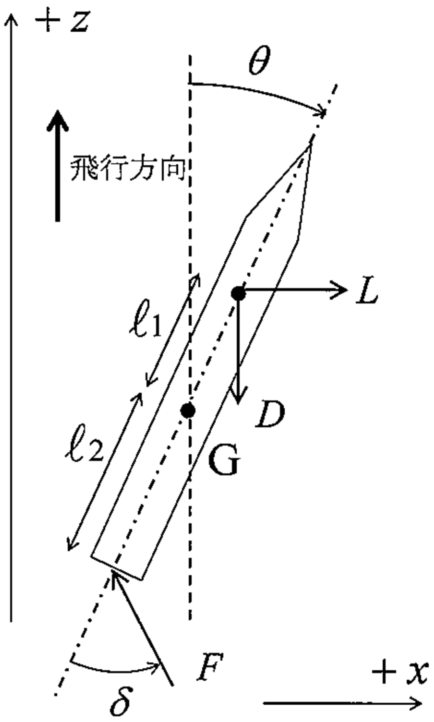

図 1.2

第 2 問

図 2.1 のように，真空中に平行平板コンデンサ（長さ a，幅 b，金属電極間の距離 d ($d \ll a, b$)）がある。真空の誘電率を ε_0 とする。この電極間に誘電率 ε ($> \varepsilon_0$) を持つ誘電体を挿入する。誘電体の長さ，幅，厚さはそれぞれ $a/2, b, d$ である。この誘電体の左端の位置を図 2.1 の x ($0 \le x < a$) により表す。この誘電体は $0 \le x < a$ で摩擦なく自由に動かすことができる。$0 \le x \le a/2$ の位置では誘電体がすべて電極の間にあり，$a/2 < x < a$ の位置では，誘電体の一部が電極の外側にある。

図 2.2 に示すように，このコンデンサはスイッチで端子 A, B, C につなぐことで 3 つの回路に接続することができる。このとき以下の問いに答えよ。図 2.2 に示す以外の容量，インダクタンス，抵抗は無視できる。

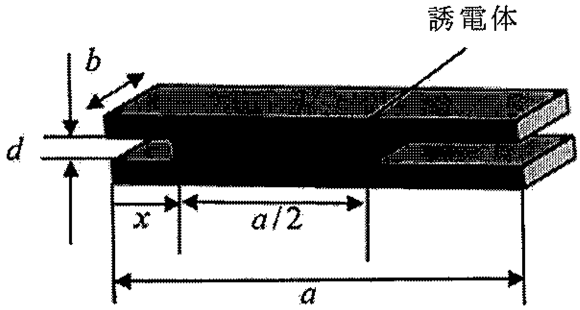

図 2.1

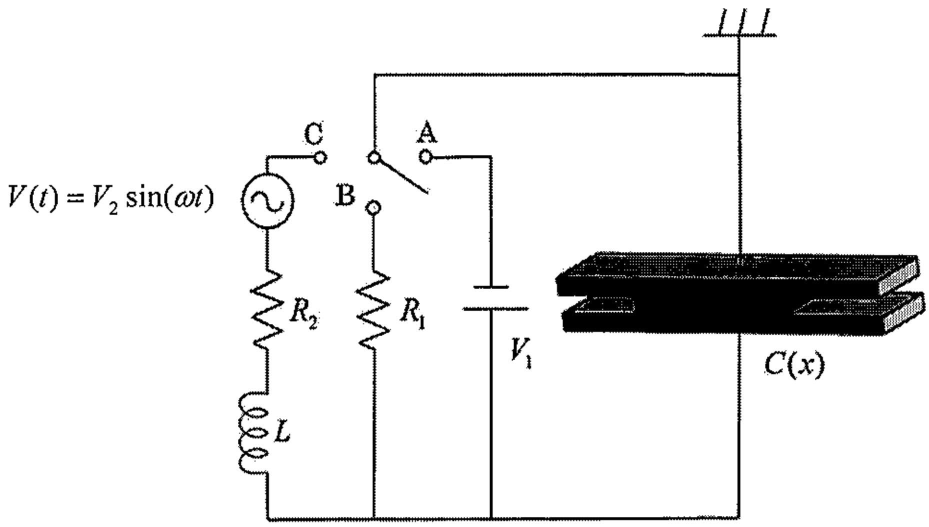

図 2.2

I. スイッチを端子Aに接続し十分に時間が経過した。接続されている定圧直流電源の電圧をV_1とする。

1. コンデンサの全静電容量$C(x)$をxの関数として，$x, \varepsilon_0, \varepsilon, a, b, d, V_1$の中から必要なものを用いて示せ。$x$の範囲は$0 \le x < a$とする。
2. コンデンサに蓄えられるエネルギー$U(x)$をxの関数として$x, \varepsilon_0, \varepsilon, a, b, d, V_1$の中から必要なものを用いて示せ。$x$の範囲は$0 \le x < a$とする。
3. 誘電体を$a/2 < x < a$の範囲内でゆっくりΔx動かすとき，コンデンサに蓄えられる電荷量の変化$\Delta Q(x)$を$\Delta x, x, \varepsilon_0, \varepsilon, a, b, d, V_1$の中から必要なものを用いて示せ。
4. 誘電体に作用する水平方向の力$F_1(x)$をxの関数として$x, \varepsilon_0, \varepsilon, a, b, d, V_1$の中から必要なものを用いて示せ。$x$の範囲は$0 \le x < a$とする。誘電体に作用する力の方向は，$x$が増加する方向（図2.1の右側方向）を正と定義する。

II. 誘電体の位置を$x = 3a/4$に設定し，スイッチを端子Aに接続して十分に時間が経過した後，スイッチを端子Aから端子Bに切り替えた。端子Bに接続された抵抗の大きさをR_1とする。誘電体に作用する力$F_2(t)$と経過時間tの関係を，$t, x, \varepsilon_0, \varepsilon, a, b, d, V_1, R_1$の中から必要なものを用いて示せ。誘電体に作用する力の方向は，問I.4と同じように定義する。スイッチを端子Bに切り替えた瞬間を$t = 0$とする。抵抗R_1は十分に大きく，コンデンサ内の変位電流による磁場発生は無視できる。

III. スイッチを端子Cに接続した。接続された抵抗の大きさとコイルのインダクタンスをそれぞれR_2, Lとする。交流の角振動数をωとし，電源の交流電圧は$V(t) = V_2 \sin(\omega t)$と表現する。

1. 抵抗R_2で消費される電力の実効値$P_2(x)$は，誘電体の位置xの関数となる。$0 \le x < a$の範囲で$P_2(x)$が極大値をもつLの条件を$\varepsilon_0, \varepsilon, a, b, d, V_2, R_2, \omega$ の中から必要なものを用いて示せ。
2. 問III.1の条件下で$P_2(x)$を最大に調整したとき，コンデンサの両端にかかる電圧波形をグラフに例示せよ。また電源の交流電圧波形についても同じグラフに重ねて示せ。2つの波形の関係について物理的な意味を記述せよ。

第 3 問

I. 外界から孤立した熱容量 C をもつ温度 T_1 の固体 a を，同じ熱容量 C をもつ温度 T_2 の固体 b に接触させると，両固体の温度が等しくなり熱平衡状態となった。ただし，接触後の両固体の体積変化は無いものとする。この熱平衡状態における温度 T_f と接触前後の系全体におけるエントロピー変化 ΔS を求めよ。さらに，エントロピーが増大 $(\Delta S > 0)$ することを示せ。

II. 図 3.1 に，2 つの一定温度の熱源の間で動作する不可逆熱機関 A と可逆ヒートポンプ B がある。不可逆熱機関 A は，1 サイクルで高温熱源 R_2 から熱量 Q_2^A を吸収し，外へ仕事 W をして，低温熱源 R_1 へ Q_1^A だけの熱量を放出する。不可逆熱機関 A で発生した仕事 W により，可逆ヒートポンプ B は，低温熱源 R_1 から Q_1^B の熱量を取り入れ，高温熱源 R_2 へ Q_2^B の熱量を供給する。不可逆熱機関の熱効率を $\eta_A(=W/Q_2^A)$ とし，可逆ヒートポンプの熱効率を $\eta_B(=W/Q_2^B)$ とする。次の η_A と η_B の関係式(a)～(c)の中から，熱力学第二法則に反するものをすべて選んで，その理由を説明せよ。

$$\text{(a)}\ \ \eta_A < \eta_B,\ \text{(b)}\ \ \eta_A = \eta_B,\ \text{(c)}\ \ \eta_A > \eta_B$$

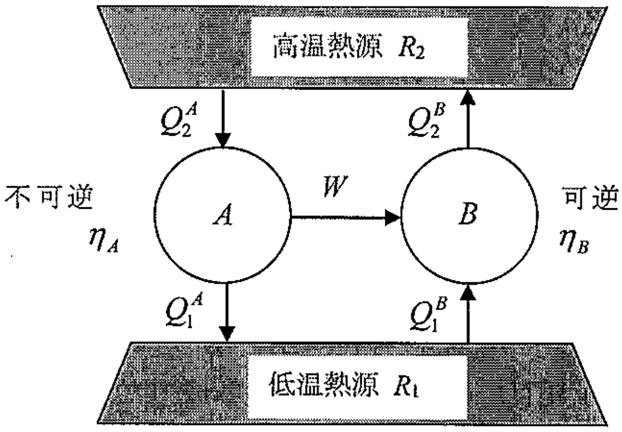

図 3.1

◇M2(790—25)

III. 外界から孤立した温度Tの密閉した容器があり，内部は光子気体で満たされている。このとき，熱平衡状態下において，光子気体の圧力pは，容積Vに依存せず，正の定数aを用いて次式で与えられる。

$$p = \frac{1}{3}aT^4 \tag{1}$$

以下の問いに答えよ。

1. 光子気体に定圧熱容量が存在しない理由を説明せよ。
2. 温度一定の条件下で，容積Vを準静的に変化させたとき，熱力学第一法則より，式(2)が成り立つ。ここで，Uは光子気体の内部エネルギーで，Sはエントロピーである。この場合，光子気体の内部エネルギーUの変化は，式(3)で表される。熱力学第一法則を用いて，式(3)が成り立つことを示せ。マクスウェルの関係式である式(4)を用いてよい。

$$dU = TdS - pdV \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{4}$$

3. 熱平衡状態における光子気体の内部エネルギー$U(T,V)$とエントロピー$S(T,V)$を，それぞれ求めよ。ただし，絶対零度$(T=0)$における内部エネルギーとエントロピーは，両方ともゼロとする。
4. 図 3.2 に，光子気体を作業物質とするカルノーサイクルを示す。このサイクルは，等温膨張(A→B)，断熱膨張(B→C)，等温圧縮(C→D)，断熱圧縮(D→A)の 4 過程から成り立つ。温度T_2の等温膨張において系が吸収する熱量をQ_2とし，温度$T_1(<T_2)$の等温圧縮において，系が放出する熱量をQ_1とする。Q_2およびQ_1を求めよ。ただし，系に入る熱量を正とする。
5. この時，式(5)で示すクラウジウスの等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{Q_2}{T_2}+\frac{Q_1}{T_1}=0 \tag{5}$$

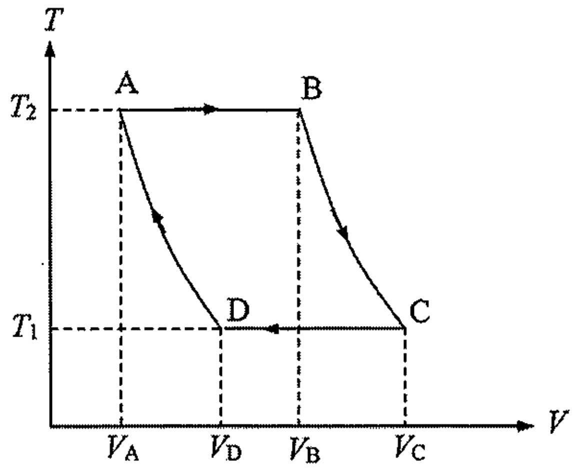

図 3.2

第 4 問

光と粒子の波動性および相対論的効果に関する以下の問いに答えよ。

I. 図 4.1 のように，光が単スリットと二重スリットを通過し，スクリーンへ到達する。このとき，干渉縞がスクリーンに生じた。以下の問いに答えよ。ただし，スリットの幅は波長に比べて十分狭いとする。

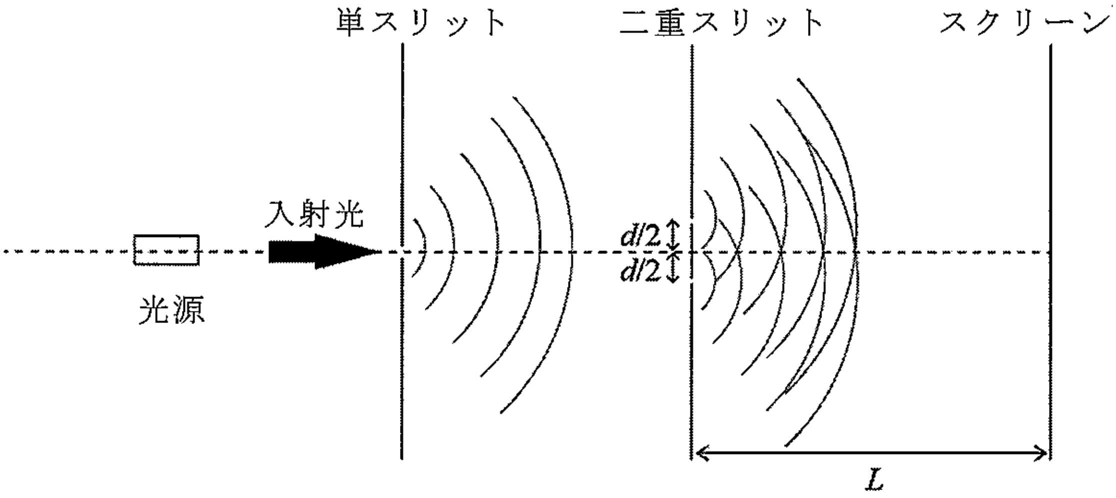

図 4.1

1. 入射光は単色の可視光でその波長はλとする。図 4.1 のように二重スリットのスリット間隔をd，二重スリットとスクリーンの間の距離をLとする。このとき，スクリーンに現れる干渉縞間隔xをλ，d，Lを用いて表せ。ただし，Lはdとλより十分に大きいとする。
2. 入射光を単色光から白色光に変えた。単色光と白色光の場合でスクリーン上に生じるパターンの違いを考察し記述せよ。必要に応じて図を用いても良い。

II. 図 4.1 において，光ではなく，電子線が二重スリットを通過し，スクリーンに到達する場合を考える。量子力学では，電子は粒子と波の両方の性質を持つ。そのため，光の場合と同様にスクリーン上に干渉縞が生じる。電子の波長λは$\lambda = h/p$ で与えられる。ここで，hはプランク定数であり，pは電子の運動量である。以下の問いに答えよ。

1. 電子の質量をm，電子の電荷をeとする。真空中にて電位差Vで加速された電子の波長λをm，e，h，Vを用いて表せ。ここでは相対論的効果は無視してよい。
2. 問 II.1 で導出した式を用いて，波長 2.0 Åの電子を得るために必要な加速電位差を計算せよ。計算には以下の値を用いること。

プランク定数	$h = 6.6\times10^{-34}$ [J s]
電子の電荷	$e = 1.6\times10^{-19}$ [C]
電子の質量	$m = 9.1\times10^{-31}$ [kg]

III. 加速された電子の速度が光速に近づくにつれ，相対論的効果が無視できなくなる。プランク定数をh，電子の電荷をeとして，以下の問いに答えよ。

1. 2つの慣性系S，S'における座標系を(x,y,z)と(x',y',z')とする。Sにおける時刻をt，S'における時刻をt'とする。2つの慣性系は平行に移動する。$t=t'=0$のとき，S'の座標の原点と時間はSでのそれと一致している。S'はSから見てx軸の正の方向に速度vで移動する。このとき，S，S'の座標系間の座標変換を

$$x' = \alpha(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \tag{1}$$

$$x = \alpha(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z' \tag{2}$$

と定義する。$t=t'=0$に原点からx軸の正の方向にパルス光が発射される。いずれの慣性系においても光速度cは不変である。パルス光が慣性系Sにおいて時刻tに到達する位置と，慣性系S'において時刻t'に到達する位置を考えて，正の係数αの表式を，vとcで表せ。
2. 相対論的効果を考慮すると，速度vで等速度運動を行う電子の運動量pは問 III.1 で求めた係数αを用いて

$$p = \alpha m_0 v \tag{3}$$

と表される。m_0は電子の静止質量である。また，この電子の全エネルギーEは，

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2 \tag{4}$$

を満たす。ただし，静止エネルギーはm_0c^2とする。

真空中にて電位差Vで加速された後，等速度運動を行う電子を考える。この電子の波長λと速度vをc，m_0，e，V，hのうち必要なものを用いて表せ。ここでは相対論的効果を含めよ。