○当該問題

III. 図 1.2 に示すように，大気中を鉛直上向き $+z$ 方向に飛行するロケットを考える。ロケットは，図 1.2 の zx 面内のみを動くと仮定する。ロケットの機軸の鉛直上向き $+z$ 方向からの傾きを θ とし，初期状態において θ はゼロではない微小な初期値を持つとする。ロケットには，ロケットの重心 G から機軸上にロケット前方に向かって距離 ℓ_1 の位置に，水平方向（$+x$ 方向）と垂直方向（$-z$ 方向）それぞれに力 $L=K_L\theta$ および $D=K_D\theta$ が働く。ただし，K_L と K_D は，正の定数とする。ロケット機軸の末端（G からロケット後方に向かって距離 ℓ_2 の位置）にはロケットエンジンが取付けられ，この末端に一定の大きさ F の力を与えている。この力の方向は制御可能で，それによりロケットの機軸の方向を安定化させる。外力 F の機軸からの傾きを図 1.2 のように δ と定義する。重心 G を通り zx 平面に垂直な軸まわりのロケットの慣性モーメントを I とし，時間変化はしないものとする。θ と δ は十分小さいとして，$\sin\theta\cong\theta$, $\sin\delta\cong\delta$, $\cos\theta\cong 1$, $\cos\delta\cong 1$ と近似する。以下の問いに答えよ。

1. ロケットの重心周りの回転に関する運動方程式を立て，時間 t に関する θ の二階の微分方程式を求めよ。ただし，θ^2 の項は無視すること。
2. $\delta=0$ の時，$|\theta|$ が時間とともに増加することを示せ。
3. $\delta=\alpha\theta$ となるように δ を制御する時，$t\to\infty$ で θ が 0 に収束するための定数 α の条件を求めよ。
4. $\delta=\alpha\theta+\beta(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)$ となるように δ を制御する時，$t\to\infty$ で θ が 0 に収束するための定数 α,β の条件を求めよ。

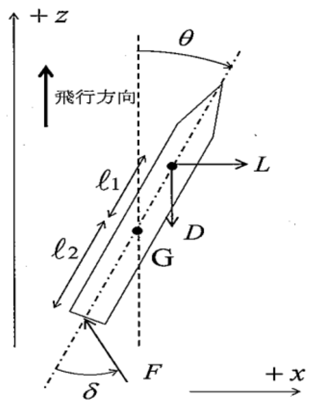

図 1.2

○出題ミスに関する説明

小問 3.においては、ロケットの傾き θ は以下の時間に関する二階の微分方程式に従う。

$$\ddot{\theta}=\frac{K_L l_1+F l_2\alpha}{I}\theta$$

ここで、右辺の θ の係数が負になるような α であれば、θ は単振動する。この時、α が満たす条件を求めさせることが本小問の意図したところであった。しかしながら、$t\to\infty$ で θ が 0 に収束することはないため、「$\delta=\alpha\theta$ となるように δ を制御する時、$t\to\infty$ で θ が 0 に収束するための定数 α の条件を求めよ。」という本小問の問題文に対する解答は存在しない。