平成29年度

大学院入学試験問題

数　学

午後１：00～３：30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ６問のうち，任意の３問(社会基盤学専攻，システム創成学専攻，原子力国際専攻及び技術経営戦略学専攻の受験者は２問)を選んで解答すること。
4. 解答用紙３枚(社会基盤学専攻，システム創成学専攻，原子力国際専攻及び技術経営戦略学専攻の受験者は２枚)が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることとなる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙及び問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

I.　以下の定積分を求めよ。

$$I=\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}} \tag{1}$$

II.　以下の微分方程式の一般解と特異解を求めよ。

$$y=x\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{2}$$

III.　以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-8y=x^2 \tag{3}$$

第 2 問

次の 3 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に関する以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

I. 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を全て求めよ。

II. 行列 $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ。ただし，n は自然数とする。

III. 3 次正方行列 $\boldsymbol{B}$ は対角化可能で，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ の関係を満たすものとする。行列 $\boldsymbol{A}$ の任意の固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ は，行列 $\boldsymbol{B}$ の固有ベクトルでもあることを示せ。

IV. $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$ の関係を満たす 3 次正方行列 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。ただし，行列 $\boldsymbol{B}$ はその固有値が全て正となる対角化可能な行列とする。

V. 3 次正方行列 $\boldsymbol{X}$ は対角化可能で，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ の関係を満たすものとする。$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AX})=d$ のとき，$\det(\boldsymbol{AX})$ の最大値を d の関数として求めよ。ただし，d は正の実数とし，行列 $\boldsymbol{X}$ の固有値は全て正とする。また，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})$ は正方行列 $\boldsymbol{M}$ のトレース（主対角成分の和）であり，$\det(\boldsymbol{M})$ は行列 $\boldsymbol{M}$ の行列式である。

第 3 問

次の問いに答えよ。ただし，iは虚数単位であり，eは自然対数の底，logは自然対数である。

I. 次の定積分Iを考える。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \, d\theta}{(2+\cos\theta)^2} \tag{1}$$

1. 定積分Iを複素数zを用いて複素関数積分

$$\oint_{|z|=1} G(z)dz \tag{2}$$

の形に書き直したときの複素関数$G(z)$を求めよ。ただし，積分路は単位円周上を反時計回りに一周するものとする。

2. 全ての極とその極の位数，および留数を求めよ。
3. 積分Iを求めよ。

II. 実数パラメータα，βをもつ実数θの関数

$$f(\theta;\alpha,\beta) = 1 + e^{2i\beta} + \alpha e^{i(\theta+\beta)} \tag{3}$$

に対して以下の定積分$F(\alpha,\beta)$を考える。

$$F(\alpha,\beta) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d}{d\theta}[\log f(\theta;\alpha,\beta)] \tag{4}$$

1. 定積分$F(\alpha,\beta)$を複素数zを用いて複素関数積分

$$\oint_{|z|=1} G(z)dz \tag{5}$$

の形に書き直したときの複素関数$G(z)$を求めよ。ただし，積分路は単位円周上を反時計回りに一周するものとする。

2. 全ての極とその極の位数，および留数を求めよ。

3. パラメータ α，βを場合分けして，$F(\alpha,\beta)$の値を求めよ。ただし，極が積分路上にある場合は考えなくて良い。

第 4 問

$0 \le \theta < 2\pi$，$0 \le \alpha \le \pi$の範囲にある実数θ，αに対して，3 次元直交座標系 xyz における点 P $(\cos\theta, \sin\theta, 1)$ と点 Q $(\cos(\theta+\alpha), \sin(\theta+\alpha), -1)$ の 2 点を通る直線Lを考える。

I. 直線Lを，媒介変数tの一次式として表せ。ただし，$t=0$の時に点Qを，$t=1$の時に点Pを表すように定めよ。

II. θを$0 \le \theta < 2\pi$の範囲で変化させたときに直線Lが描く曲面Sをx，y，zの方程式として求めよ。また，曲面Sと平面$y=0$の交線をCとする。Cをx，zの方程式として求め，その概形を図示せよ。

次に，曲面Sのガウス曲率を考える。一般に曲面上の点Rの位置ベクトル$\boldsymbol{r}$が媒介変数u，vを用いて，

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \qquad (1)$$

で与えられるとき，ガウス曲率Kは次式のように表される。

$$K = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{e})(\boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{e}) - (\boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{e})^2}{(\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2} \qquad (2)$$

ここで，$\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$と$\boldsymbol{r}_{uu}$，$\boldsymbol{r}_{uv}$，$\boldsymbol{r}_{vv}$は媒介変数u，vに関する$\boldsymbol{r}(u,v)$の一階偏微分，二階偏微分を表している。また，$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$は 3 次元ベクトル$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$の内積，$\boldsymbol{e}$は点Rにおける法線方向の単位ベクトルを表している。

III. 曲面Sとx軸の交点のうち領域$x>0$にあるものを点Wとする。$0 \le \alpha < \pi$を満たすαに対し，点Wにおける曲面Sのガウス曲率を計算せよ。

IV. $0 \le \alpha < \pi$を満たすαに対し，曲面Sの任意の点においてガウス曲率が0以下であることを示せ。

第 5 問

$t \geq 0$で定義される関数$f(t)$のラプラス変換$F(s) = L[f(t)]$は

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \qquad (1)$$

で定義される。ただし，sは複素数，eは自然対数の底とする。以下の問いに答えよ。導出過程を示すこと。

I. 以下の関係式が成り立つことを示せ。

1. nが自然数のとき，$L\left[t^n\right] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$
2. $f(t)$が微分可能であるとき，$L\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$
3. aが実数のとき，$L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

II. ラプラス変換を用いて，$t \geq 0$における以下の微分方程式の解を求めよ。

$$t\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + (1+3t)\frac{df(t)}{dt} + 3f(t) = 0, \quad f(0) = 1, \quad \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = -3 \qquad (2)$$

ただし，$L[tf(t)] = -\dfrac{d}{ds}F(s)$の関係式を用いてよい。

III. 次の連立微分方程式を満足する点P $(x(t), y(t))$が，$t = 0$のとき点(a,b)を通るとする。ただし，a，bは実数とする。

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = x(t) - 2y(t) \end{cases} \qquad (3)$$

1. ラプラス変換を用いて，$t \geq 0$における式(3)の解を求めよ。
2. 問 III. 1 の解からtを消去し，xとyの関係式を示せ。
3. $(a,b) = (1,1)$および$(-1,1)$のとき，tを0から無限大まで連続的に変化させた場合の点Pの軌跡をそれぞれ図示せよ。

第 6 問

ある製品工場では製品Ⅰと製品Ⅱを製作している。製品Ⅰには部品Aが必要であり，製品Ⅱには部品Aと部品Bが必要である。部品Aと部品Bには規格内のものと，規格外のものとがある。これらの部品は部品工場から製品工場へ納品されるが，部品の検査はない。部品Aと部品Bの品質は独立であり，互いに影響を及ぼさないとする。部品A，部品Bが規格内である確率は，それぞれa，bである。

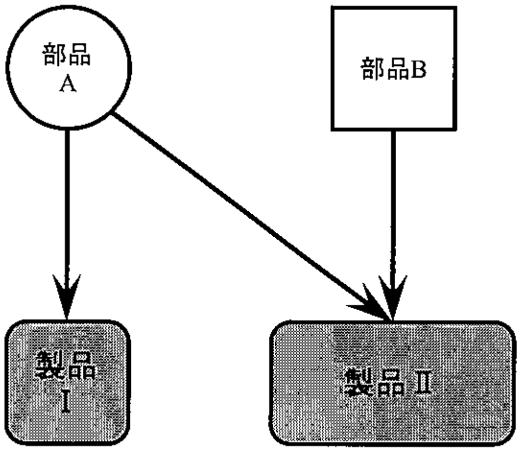

図 6.1

製品Ⅰと製品Ⅱは製品工場で出荷前に，製品の規格について合格か，不合格かを検査され，各検査は互いに影響を及ぼさない。ただし，この検査はかならずしも正しく判定できる訳ではない。すなわち，規格内の製品は確率xで合格と判定されるが，規格外の製品も確率yで合格と判定される。

以下の問いに答えよ。

I. 無作為に抽出された一つの製品Ⅰを 1 回，製品検査した。ここで，製品Ⅰを規格内に製作することができる確率は下記のように定められる。

- 部品Aが規格内であるとき，製品Ⅰを規格内に製作することができる確率はcである。
- 部品Aが規格外であるとき，製品Ⅰを規格内に製作することはできない。

1. 製品Iが製品検査で合格と判定される確率を求めよ。
2. 製品Iが製品検査で合格と判定されたとき，この製品が実際に規格内である確率を求めよ。

II. 無作為に抽出された一つの製品IIをn回，製品検査した。ここで，製品IIを規格内に製作することができる確率は下記のように定められる。

- 部品Aと部品Bがともに規格内であるとき，製品IIを規格内に製作することができる確率はcである。
- 部品Aと部品Bのいずれかのみが規格内であるとき，製品IIを規格内に製作することができる確率はdである。
- 部品Aと部品Bがともに規格外であるとき，製品IIを規格内に製作することはできない。

1. 製品IIが規格内である確率を求めよ。
2. 製品IIがn回とも合格と判定された時，この製品が実際に規格内である確率を求めよ。