平 成 29 年 度

大学院入学試験問題

物 理 学

午前９：00～11：00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ４問のうち，任意の２問を選んで解答すること。
4. 解答用紙２枚が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることとなる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙及び問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

長さl，質量Mで太さが無視できる一様な細い剛体棒ABが，図1.1のように，水平面上に鉛直に静止している。棒の端Aの初期位置を原点とし x，y軸を図のように定義する。棒の上端Bに，x軸正方向の無視できる微小な速度を与えたところ，棒が倒れ始めた。棒の重心をG，重力加速度をgとして以下の問いに答えよ。ただし，水平面からの摩擦や空気抵抗は無視してよい。また，問IからIVでは棒の端Aが水平面から離れないと仮定してよい。

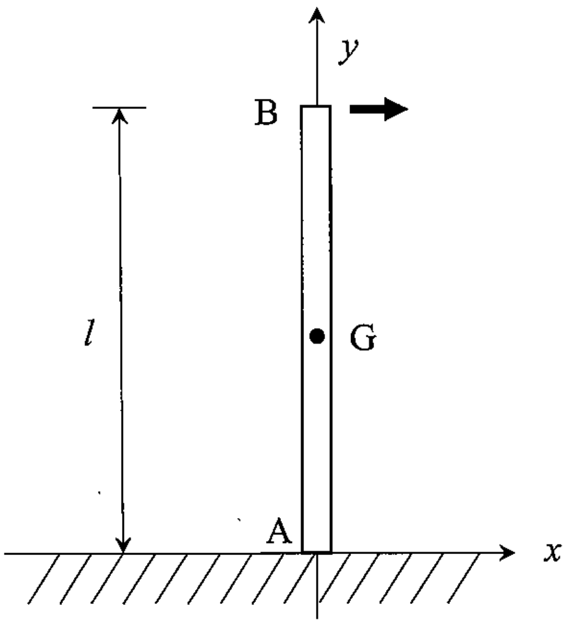


図1.1

I. 重心Gを通りxy平面に直交する軸のまわりの棒の慣性モーメントIが $I=\dfrac{1}{12}Ml^2$ と表せることを示せ。

II. 棒ABがy軸となす角をθとすると，θは$\theta=0$から時間とともに増加する。棒の並進運動とGまわりの回転運動の方程式を示せ。ただし，Aが水平面から受ける垂直抗力をRとせよ。

III. 角θの微分方程式をg，lのみを含む形で示せ。

IV. 棒の端Bが図の水平面に接する直前の重心まわりの棒の回転角速度とBの速度を求めよ。

V. 棒の端Bが図の水平面に接するまで，棒の端Aが水平面から離れないことを示せ。

第 2 問

図 2.1 に示すように，半径 r の半円状の導体板 2 枚を平行に z_0 だけ離して真空中に置く。真空の誘電率は ε_0 である。上下の導体板をそれぞれ電極 A，電極 B とする。電極 A, B の縁の直線部分の中点を O_A, O_B とする。電極 A は O_A を中心に回転することができ，電極 A，電極 B の縁の二つの直線部分がなす角度を θ とし，上下の電極が全く重なっていない状態を $\theta=0$ とする。本問では電極面に直交する電界のみを考え，電極端部の効果は無視する。以下の問いに答えよ。

I. 電極間の角度 θ を $\pi/2$ とし，電極 A，電極 B にそれぞれ真電荷 Q, $-Q$ $(Q>0)$ を与える。

1. 電極が重なっている部分の電界強度 E を求めよ。
2. 電極 A の電極 B に対する電位 V_1 を求めよ。
3. 電極 A-B 間の静電容量 C を求めよ。
4. 角度 θ を $\theta=\pi/10$ から $\theta=19\pi/10$ までゆっくりと増加させた。

電極 A の電極 B に対する電位 V を角度 θ の関数として求め，V と θ の関係をグラフに示せ。

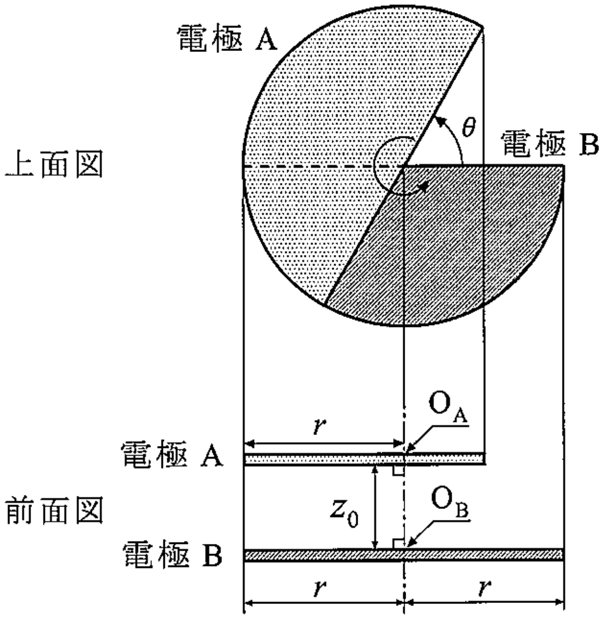


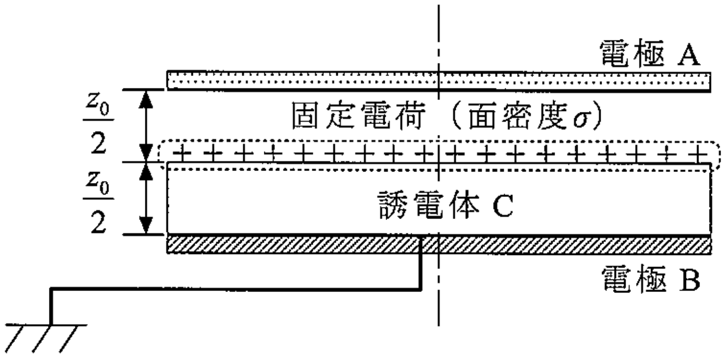
図 2.1

II. 電極 A，電極 B の電荷を 0 に戻し，角度 θ を $\theta=\pi$ とする。図 2.2 に示すように，半径 r，厚み $z_0/2$，比誘電率 k の半円状の誘電体 C を電極 B 上に置く。さらに電極 B のみを接地し，誘電体 C の上面に一様な面密度 $\sigma\,(\sigma>0)$ の真電荷を固定する。このとき誘電体 C は分極を起こし，誘電体内の電界は弱まる。

1. 電気力線と電束線をそれぞれ別の前面図に示せ。作図にあたり $k=2$ とし，線の密度が $\varepsilon_0 E$ と電束密度 D の大きさをあらわすようにせよ。
2. 電極 A，電極 B 上の真電荷 Q_A，Q_B をそれぞれ求めよ。

III. 前問に引き続き，図 2.3 に示すように，電極 A も接地する。

1. 電極 A，電極 B に誘起される真電荷をそれぞれ Q'_A，Q'_B，誘電体 C の上面と電極 A の間の電界強度を E'_A，誘電体 C 内部の電界強度を E'_B とする。E'_A，E'_B を Q'_A，Q'_B を用いてそれぞれ示せ。
2. 電界 E'_A，E'_B が満たすべき関係を示し，Q'_A，Q'_B を求めよ。
3. 電気力線と電束線をそれぞれ別の前面図に示せ。作図にあたり $k=2$ とし，線の密度が $\varepsilon_0 E$ と電束密度 D の大きさをあらわすようにせよ。
4. 次に $\theta=0$ とし，電極 A を一定の角速度 $\omega\,(\omega>0)$ でゆっくり回転させる。電極 A に流れ込む電流を時間 t の関数 $I(t)$ として求めよ。ただし，$0<\theta<2\pi$ とせよ。



前面図

図 2.2

◇M2(676—20)

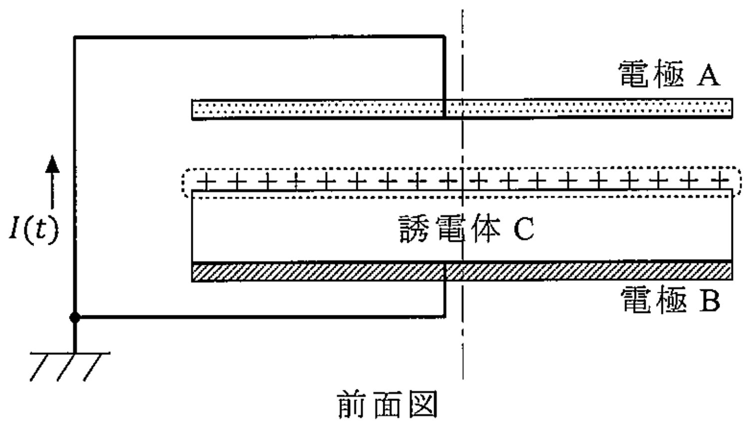


図 2.3

第 3 問

I. 理想気体では以下の状態方程式が成り立つ。

$$pv = RT \tag{1}$$

ここで，pは圧力，vは単位質量あたりの体積（比体積），Tは温度であり，Rは気体の種類によって決まる定数である。以下の問いに答えよ。

1. 体積膨張係数αと等温圧縮率k_Tは，

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \tag{2}$$

および

$$k_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \tag{3}$$

で与えられる。理想気体に対し，αおよびk_Tをそれぞれ式(1)中の状態量のいずれか 1 つを用いて表せ。ここで，添字p，Tはそれぞれ圧力p，温度Tを一定に保つことを意味する。

2. 理想気体を含む気体一般に対し，定圧比熱c_pと定積比熱c_vの差が

$$c_p - c_v = \frac{vT\alpha^2}{k_T} \tag{4}$$

で表されることを示せ。ただし，c_pとc_vは，それぞれ

$$c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \tag{5}$$

$$c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \tag{6}$$

と表される。なお，sは単位質量あたりのエントロピーであり，添字vは比体積vを一定に保つことを意味する。また，マクスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \tag{8}$$

および連鎖律の式

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = -1 \tag{9}$$

を用いよ。

3. 理想気体において，ある熱力学的平衡状態 $1(p_1, v_1, T_1)$から準静的かつ可逆的に他の熱力学的平衡状態 $2(p_2, v_2, T_2)$に移る系を考え，sの変化を，c_v，v_1，v_2，R，T_1，T_2を用いて表せ。なお，c_vは一定と仮定する。
4. 問 I. 3 において，状態 1 から状態 2 への可逆変化が断熱的である場合，T_2/T_1をv_1，v_2および比熱比$\kappa = c_p/c_v$を用いて表せ。

II. 理想気体で行う準静的サイクルの熱効率について考える。ここでは，q_A，q_B，q_C，q_Dは単位質量あたりの供給熱量，q_E，q_F，q_Gは単位質量あたりの排出熱量とし，定圧比熱c_p，定積比熱c_vは一定と仮定する。以下の問いに答えよ。

1. 図 3.1 の$p-v$線図で示されるサイクル A は，断熱変化 1→2，定積変化 2→2′，断熱変化 2′→4，定積変化 4→1 の 4 つの可逆過程からなる。このサイクルの熱効率$(q_A - q_E)/q_A$を，圧縮比$\varepsilon = v_1/v_2$および比熱比$\kappa = c_p/c_v$を用いて表せ。
2. 図 3.2 のサイクル B は，断熱変化 1→2，定圧変化 2→3，断熱変化 3→4，定積変化 4→1 の 4 つの可逆過程からなる。このサイクルの熱効率$(q_B - q_F)/q_B$を，ε，κおよび締切比$\sigma = v_3/v_2$を用いて表せ。

3. 図 3.3 のサイクル C は，断熱変化 1→2，定積変化 2→2′，定圧変化 2′→3，断熱変化 3→4，定積変化 4→1 の 5 つの可逆過程からなる。このサイクルの熱効率 $(q_C+q_D-q_G)/(q_C+q_D)$ を，ε，κ，σ および圧力上昇比 $\rho=p_3/p_2$ を用いて表せ。

4. 上で考えた 3 つのサイクル A，B，C のうち，同じ圧縮比 ε において熱効率の最も大きいサイクル，最も小さいサイクルはそれぞれどれか。理由をつけて示せ。ただし，$\varepsilon>2$，$\kappa=4/3$，$\rho>1$，$\sigma=2$ とし，$2^{1/3}=1.26$ としてよい。

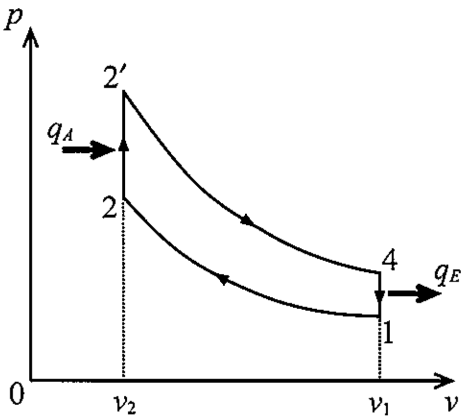


図 3.1

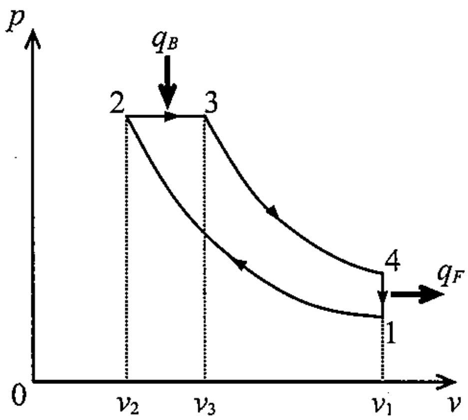


図 3.2

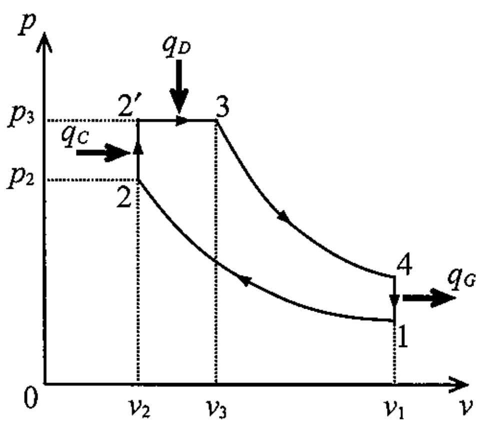


図 3.3

第 4 問

I. 質量 M_0 の原子 N 個が，ばね定数 K_s のばねで環状に結ばれている 1 次元格子での振動を考える。N は十分に大きく，局所的には図 4.1 のように格子は直線状であると考えてよいものとする。平衡位置での原子間の間隔は a とする。以下の問いに答えよ。

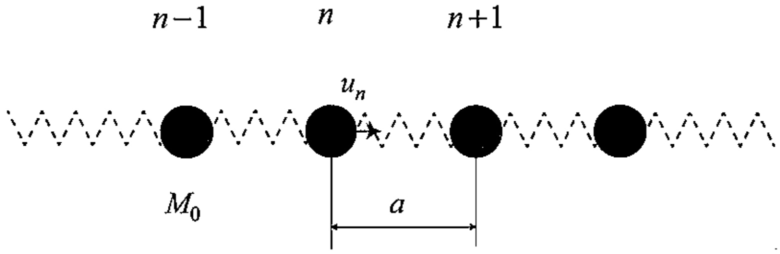


図 4.1

1. n 番目の原子の平衡位置からの変位を u_n とする。運動方程式を M_0，K_s，u_n，u_{n+1}，u_{n-1} を用いて表せ。ただし，力と変位は図中右向きを正とする。
2. 問 I. 1 の運動方程式の一般解は，振動の振幅を u として

$$u_n = u\exp\{-i(\omega t - kna)\} \tag{1}$$

で表される。ただし，ω は角振動数であり，k は波数である。この一般解を用いて，ω と ka の関係を表す式を求めよ。

次に，図 4.2 のように質量 M_1 と M_2 の原子が交互にばね定数 K_s のばねで結ばれている環状の 1 次元格子での振動を考える。格子は局所的には直線状であり，隣接する原子間の平衡位置での間隔は a とする。以下の問いに答えよ。

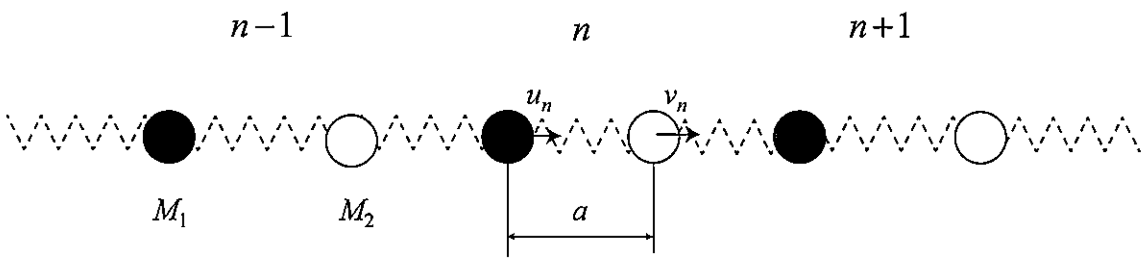


図 4.2

3. n番目の質量M_1の原子の平衡位置からの変位をu_n，質量M_2の原子の平衡位置からの変位をv_nとする。2 種類の原子の運動方程式をM_1，M_2，K_s，u_n，u_{n+1}，u_{n-1}，v_n，v_{n+1}，v_{n-1}を用いて表せ。ただし，力と変位は図中右向きを正とする。
4. この運動方程式の一般解を示せ。ただし，u_n，v_nの振幅をそれぞれ，u，vとせよ。
5. ω^2とkaの関係を表す式を求めよ。

II. 量子力学では，問 I のような 1 次元格子における調和振動は以下のシュレーディンガー方程式

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2M_0}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}M_0\omega^2x^2\right\}\varphi(x)=E\varphi(x) \qquad (2)$$

の解として得られる。ここで，$\varphi(x)$は波動関数，xは原子の座標，Eは固有値，$\hbar$はプランク定数をhとして$\hbar=h/2\pi$である。このシュレーディンガー方程式の解における基底状態と第一励起状態は

$$\varphi_0(x)=C_0\exp\left(-\frac{M_0\omega}{2\hbar}x^2\right) \qquad (3)$$

$$\varphi_1(x)=C_1\sqrt{\frac{M_0\omega}{\hbar}}\,x\exp\left(-\frac{M_0\omega}{2\hbar}x^2\right) \qquad (4)$$

で与えられる。ただし，C_0，C_1は規格化定数である。

1. $\varphi_0(x)$と$\varphi_1(x)$を用いて，基底状態の固有値E_0と第一励起状態の固有値E_1を求めよ。
2. 基底状態と第一励起状態において原子座標の期待値$\langle x\rangle$と運動量の期待値$\langle p\rangle$が，ともに 0 となることを示せ。