平成27年度

大学院入学試験問題

物理学

午前９：00～11：00

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ４問のうち，任意の２問を選んで解答すること。
4. 解答用紙２枚が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

草 稿 用 白 紙

第 1 問

半頂角 45°，底面半径 $2R_0$ の円錐面を考える。円錐面は，図 1.1 に示すように頂点を下にして軸が鉛直になるように置かれている。円錐面の頂点には小さな穴が開けてあり，両端に質量 m の質点 1，質点 2 が取り付けられた細い糸が通してある。

穴の直径は十分に小さく，摩擦，糸の質量，太さ，伸びは全て無視できるものとする。重力加速度を g として，以下の問いに答えよ。

I. 質点 1 が円錐面上を半径 R_0，速度 v_0 で水平に等速円運動をしている。このときの質点 1 の速度 v_0 を求めよ。

II. 問 I の状態で急に糸が切れると，質点 1 は円錐面を上昇していく。
  1. 質点 1 が頂点から高さ H の位置に達した瞬間の，円錐面の軸周りの質点 1 の角速度と，質点 1 の速度の鉛直方向成分を，v_0 を含む式で表せ。
  2. 質点 1 が円錐面の上端から外に飛び出るかどうかを，理由とともに答えよ。

III. 問 I の状態で質点 2 に鉛直方向の摂動を与えたところ，その後，質点 2 は上下に微小振動を始めた。
  1. 質点 1 の座標を，円錐面頂点を原点とし，h 軸を鉛直上向きにとる円柱座標 (h, r, θ) で表したとき，質点 1 の運動が以下の微分方程式で記述される。係数 a，b を求めよ。

$$\frac{d^2r}{dt^2} + ar\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + bg = 0 \tag{1}$$

  2. 質点 1 の r 座標を $r = R_0 + \varepsilon$ とおいて微小変位 ε に関する微分方程式を導き，微小振動の周期を求めよ。

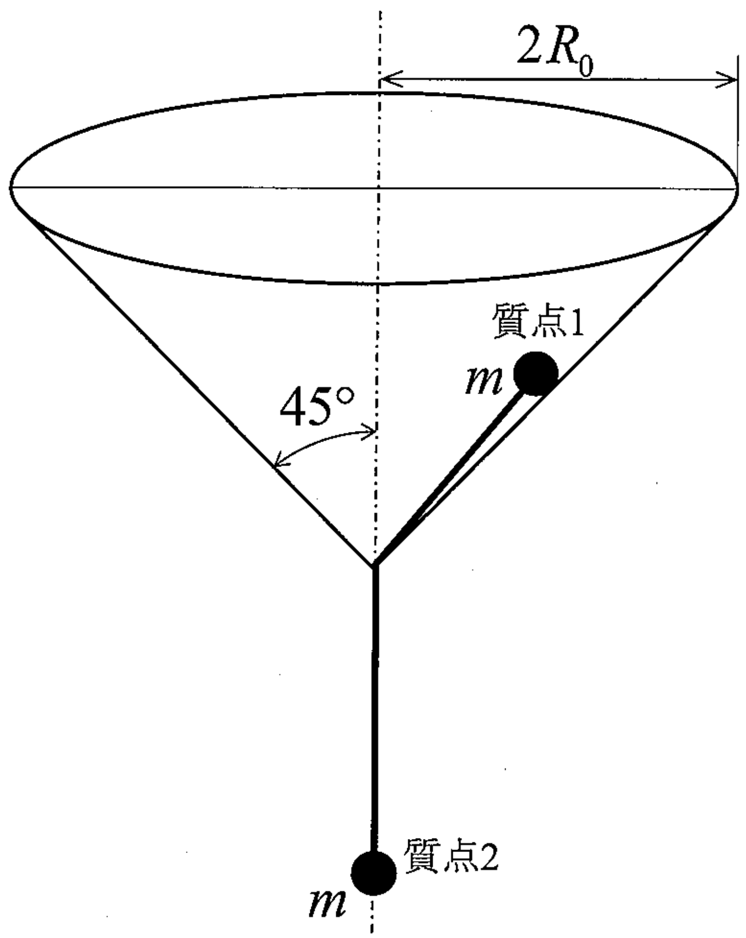

図 1.1

第 2 問

図 2.1 に示すように，真空中に，片方の端 O を中心に x-y 平面内を角速度 ω で回転運動する長さ a の直線状の導体棒 OP があり，磁束密度 B_z の一様な静磁場が$+z$ 方向に加えられている。導体棒の回転軸まわりの慣性モーメントを J とする。導体棒の太さや電気抵抗，全ての摩擦は，無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

I. 導体棒が一定の角速度 $\omega=\omega_c$ で回転している。

1. 導体棒が単位時間に通過する面積を求めよ。
2. 上の結果を用いて，導体棒の両端 O, P 間の電位差 V を求めよ。
3. 導体棒の中の電子が受ける電磁気力を全て挙げ，これらの力のつり合いについて説明せよ。

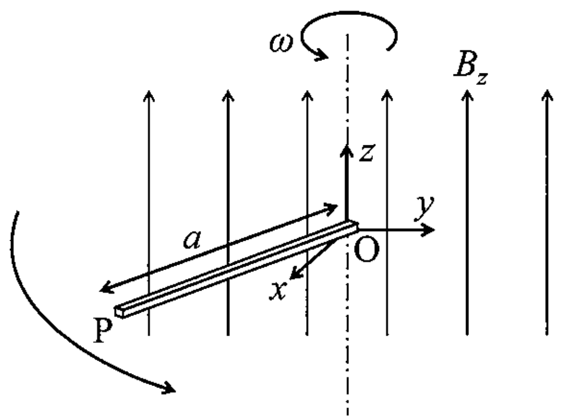

図 2.1

II. 図 2.2 に示すように，端 P に常に接触するように，半径 a，中心を O とする電気抵抗のない円形導体リングを設けた。このリングと端 O との間に，電気抵抗 R を接続した。導体棒以外の回路を流れる電流が作る磁場は無視できるものとする。

1. 導体棒に外部から回転軸まわりのトルク T_c を加えて，一定の角速度 ω_c で回転させた。このときのトルク T_c を求めよ。
2. 導体棒が回転すると，一様な磁場は歪む。このときの，導体棒の周囲の磁力線の概略を，P から O を見て描け。
3. 時刻 $t=0$ における導体棒の角速度を ω_0 とし，外部から導体棒にトルクを加えないものとする。導体棒の角速度 ω の時間変化を表す式を求めよ。さらに，ω を時刻 t の関数として図示せよ。

III. 図 2.3 に示すように，問 II で考えた回路に，インダクタンス L を直列に追加した。

1. 導体棒の角速度 ω が満たす微分方程式を書け。
2. ある条件下で，角速度 ω が振動的な振る舞いを示した。このとき L が満たす関係式を求めよ。

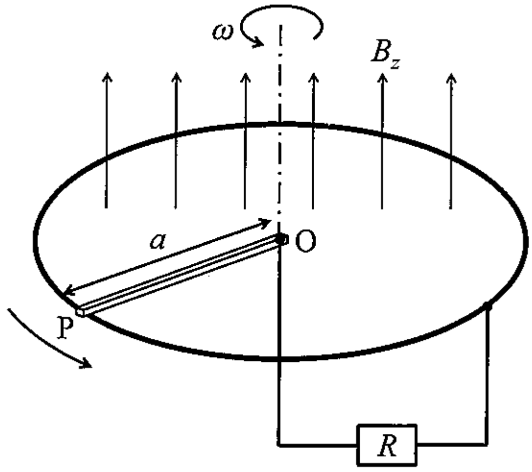

図 2.2

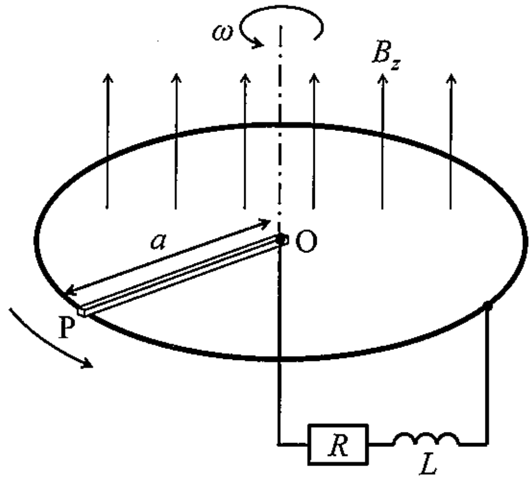

図 2.3

第 3 問

気体が様々な条件で膨張する過程について考える。1 モルあたりの内部エネルギーおよび体積をそれぞれU，V，絶対温度をT，圧力をp，気体定数をRとする。また，モル定積比熱をC_V，モル定圧比熱をC_pとし，これらは条件に依らず一定値をとるものとする。

I. 理想気体では以下の関係式が成立することを示せ。

$$C_p - C_V = R \tag{1}$$

II. 圧力p_0，体積V_0のある理想気体の準静的断熱膨張過程，または準静的等温膨張過程を考える。これら 2 つの過程におけるpとVの関係(断熱線，および等温線)を，違いが明確になるように模式的に図示せよ。なお，準静的断熱膨張過程では，以下のポアソンの式が成り立つ。

$$pV^{(C_p/C_V)} = 一定 \tag{2}$$

III. 理想気体が真空空間に対して断熱的に自由膨張する過程を考える。このとき，膨張過程前後において気体の温度が同一であることを説明せよ。また，これが不可逆過程であることを示せ。

IV. 温度T_1，体積V_1のある理想気体を以下の 2 つの過程 A または B で膨張させる。

過程 A : この気体を体積V_2まで断熱自由膨張させて平衡に達した後に，さらに体積V_3まで準静的に断熱膨張させる。
過程 B : この気体を体積V_2まで準静的に断熱膨張させた後に，さらに体積V_3まで断熱自由膨張させる。

このとき最終的な気体の温度が同じになった。V_1，V_2，およびV_3の間に成立する関係式を導け。

V. 状態方程式$\left(p+a/V^2\right)(V-b)=RT$に従うファン・デル・ワールス気体の断熱自由膨張過程について考える。ここでaおよびbは気体固有の正の定数である。体積V_4の状態にある気体が，体積がV_5となるまで断熱的に自由膨張した際の温度変化量ΔTを，V_4，V_5，R，a，b，およびC_Vのうち必要なものを用いて表せ。また，この温度変化が生じる理由をファン・デル・ワールス気体の性質から説明せよ。

なお，必要に応じて以下の関係式を用いてもよい。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p \tag{3}$$

第 4 問

I. 図 4.1 に示すような，光（平面波）の屈折を考える。真空中を伝播している光は，入射角 θ_i で屈折率 n の一様な媒質に入射し，屈折角 θ_r で屈折していく。ここで，真空中および媒質中での光の速度は，それぞれ c，v で与えられる。以下の問いに答えよ。

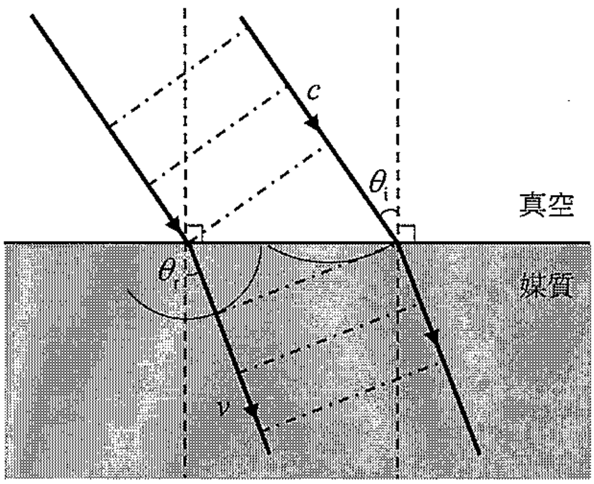

図 4.1

1. ホイヘンスの原理を使って，θ_i，θ_r，n の間に成り立つ屈折の法則（スネルの法則）を導け。
2. 量子力学的には，光エネルギーは光子によって運ばれる。光の角周波数を ω，波数を k と書くと，光子のエネルギーと運動量は，それぞれ $\hbar\omega$，$\hbar k$ である（ここで $\hbar = h/2\pi$，h はプランク定数）。真空中での運動量 $\hbar k_0$ と媒質中での運動量 $\hbar k_1$ の関係を θ_i，θ_r，c，v，n のすべてもしくは一部を用いて表せ。

II. 真空中に置かれたプリズムでの屈折や回折格子による回折を考える。図 4.2 に示すように，光（波長 λ）は，プリズム（屈折率 n，頂角 α）に入射角 θ_i で入射し，出射角 θ_o で出射した。次に，図 4.3 に示すように，多数の微小プリズム（屈折率 n，頂角 β，幅 d）を隙間なく周期的に並べた回折格子に，光を垂直に入射した。以下の問いに答えよ。

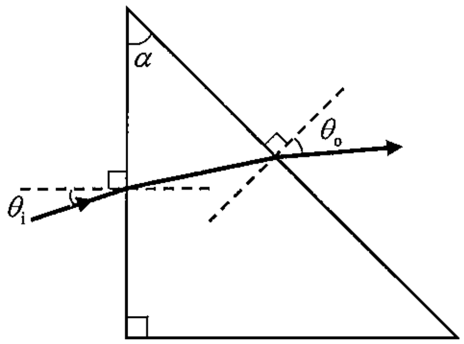

図 4.2

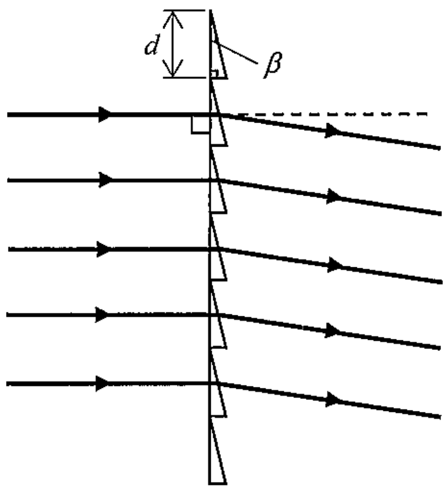

図 4.3

1. 図 4.2 のプリズムの屈折率 n を求めるため，入射角 θ_i と出射角 θ_o を測定する。プリズムの屈折率 n を θ_i，θ_o，α を用いて表せ。
2. 図 4.2 で入射角 θ_i を $0° \leq \theta_\mathrm{i} < 90°$ の範囲で変化させると，ある入射角の範囲で斜辺からの透過光が見られなくなり，底辺から光が出射した。その時の入射角 θ_i の範囲を α，n を用いて表せ。
3. 図 4.3 において，回折格子からの一次の回折光と微小プリズムによる屈折光が同じ方向に伝播するとき，微小プリズムの頂角 β を d，n，λ を用いて表せ。ただし，プリズムの幅 d は，光の波長 λ に比べて十分に大きく，微小プリズムの頂角 β は十分に小さいと近似できるとする。

草 稿 用 白 紙

草 稿 用 白 紙

草 稿 用 白 紙