平成27年度

大学院入学試験問題

数　学

午後１：00～３：30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ６問のうち，任意の３問を選んで解答すること。
4. 解答用紙３枚が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

草　稿　用　白　紙

第 1 問

I. 微分方程式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \tag{1}$$

を考える。 $p = \dfrac{dy}{dx}$ とおき，式(1)の一般解と特異解を求めよ。

II. 曲線 $y = y(x)$ の任意の点 $\mathrm{P}(x, y(x))$ における法線と x 軸との交点を N とする（図 1.1 参照）。点 P において，曲線の曲率半径が距離 PN の 2 倍となるとする。なお，点 P における曲率半径 R は式(2)で与えられる。

$$R = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2} \Bigg/ \left|\frac{d^2y}{dx^2}\right| \tag{2}$$

以下の問いに答えよ。

1. $y(x)$ が式(3)を満たすことを示せ。

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\left|y\frac{d^2y}{dx^2}\right| \tag{3}$$

2. $y\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$ のとき，式(3)を解け。得られた式が表す曲線群の名称を答えよ。

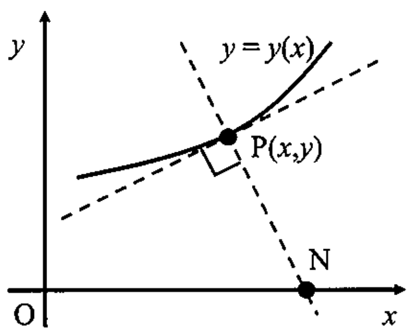

図 1.1

草 稿 用 白 紙

第 2 問

n 個の実変数 $x_i \ (i=1,2,\cdots,n)$ の 2 次形式 f は，n 次対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて次のように書くことができる。

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置，すなわち，$x_i \ (i=1,2,\cdots,n)$ を成分とする行ベクトルである。また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ のノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ を，$\|\boldsymbol{x}\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ と定義する。以下の問いに答えよ。

I. 式(2)の 2 次形式を式(1)のように表すとき，3 次対称行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ。

$$f = 6x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3 + 4x_3x_1 - 2x_1x_2 \tag{2}$$

II. 一般的な n 次対称行列 $\boldsymbol{A}$ を考える。その n 個の固有値を $\lambda_i \ (i=1,2,\cdots,n)$，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}_i \ (i=1,2,\cdots,n)$ とする。$\lambda_j \neq \lambda_k$ のとき，$\boldsymbol{u}_j$ と $\boldsymbol{u}_k$ が直交することを示せ。

III. n 次対称行列 $\boldsymbol{A}$ の n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i \ (i=1,2,\cdots,n)$ を列とする n 次正方行列を $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_2 \cdots \boldsymbol{u}_n)$ とする。ただし，$\boldsymbol{u}_i \ (i=1,2,\cdots,n)$ はすべて互いに直交し，$\|\boldsymbol{u}_i\| = 1$ を満たすものとする。このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|$ が成り立つことを示せ。

IV. $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ を III の $\boldsymbol{U}$ を用いて $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$ と定義する。式(1)の 2 次形式 f を $y_i \ (i=1,2,\cdots,n)$ および II の $\lambda_i \ (i=1,2,\cdots,n)$ によって表せ。計算過程も示せ。

V. $\|\boldsymbol{x}\|=1$の条件下において，式(2)で与えられる２次形式fの最大値，およびそのときの$\boldsymbol{x}$を求めよ。

第 3 問

任意の関数 $g(z)$ に対し，関数 $g^+(x)$ と関数 $g^-(x)$ を $g^+(x) \equiv \lim_{y\to+0} g(x+iy)$，$g^-(x) \equiv \lim_{y\to-0} g(x+iy)$ と定義する。ただし，i は虚数単位，x と y は実数，z は複素数である。また，$-1 \le x \le 1$ で連続な関数 $\varphi(x)$ に対し，関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{x-z}dx \qquad (1)$$

とする。以下の問いに答えよ。

I. 実軸上の $-1 < x < 1$ の区間において，式(2)が成り立つことを示せ。

$$f^+(x) - f^-(x) = \varphi(x) \qquad (2)$$

II. 関数 $X(z) = \sqrt{z^2-1}$ は実軸上において，

$$\frac{X^+(x)}{X^-(x)} = \begin{cases} -1 & (|x|<1) \\ 1 & (|x|>1) \end{cases} \qquad (3)$$

となることを示せ。ただし，$X(z)$ の分枝切断線（ブランチカット）を実軸上の $-1 \le x \le 1$ の区間とする。

III. 式(1)で $\varphi(x) = X^+(x)$ のとき，$f(z)$ を求めよ。ただし，$X(z)$ は II で定義した関数とする。

草 稿 用 白 紙

第 4 問

O を原点とする xyz 直交座標系に，実数 θ により表される 3 つの点，
$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta, 1)$， $\mathrm{Q}(-\cos\theta, -\sin\theta, -1)$ および， $\mathrm{R}(\cos 2\theta, \sin 2\theta, -1)$ がある。
以下の問いに答えよ。

I. 線分 $\overline{\mathrm{PQ}}$ の長さを求めよ。

II. 三角形 PQR の面積 S を θ により表せ。

III. 線分 $\overline{\mathrm{PR}}$ と xy 平面の交点を点 M とする。点 M の座標を θ により表せ。

IV. θ を 0 から π まで連続的に変化させるとき，以下の問いに答えよ。

1. 点 M の軌跡の概形を xy 平面に図示せよ。
2. 線分 $\overline{\mathrm{OM}}$ が掃過する領域の面積を求めよ。

草 稿 用 白 紙

第 5 問

関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(i\omega t)dt \tag{1}$$

と定義する。ただし，i は虚数単位，t と ω は実数である。以下の問いに答えよ。

I. $f(t)$ が実関数のとき，$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ であることを証明せよ。ただし，$\overline{F(\omega)}$ は $F(\omega)$ の複素共役を表す。

II. 2 つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ に対し，その畳み込みを

$$(f * g)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds \tag{2}$$

と定義する。ただし，s は実数である。また，関数 $g(t)$ のフーリエ変換を $G(\omega)$ とする。$(f * g)(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ と $G(\omega)$ で表せ。計算過程も示せ。

III. ある実関数 $h(t)$ が，$t < 0$ において $h(t) = 0$ を満たすものとする。また，$h(t)$ のフーリエ変換を $H(\omega)$ とする。ここで，偶関数 $r(t)$ と奇関数 $x(t)$ を次式で定義する。

$$r(t) = \frac{h(t) + h(-t)}{2} \tag{3}$$

$$x(t) = \frac{h(t) - h(-t)}{2} \tag{4}$$

このとき，$h(t) = r(t) + x(t)$ である。また，$r(t)$，$x(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $R(\omega)$，$X(\omega)$ とする。以下の問いに答えよ。

1. 任意の ω に対して $R(\omega)$ が実数であることを示せ。
2. 任意の ω に対して $X(\omega)$ が純虚数であることを示せ。
3. $h(t) = \begin{cases} \exp(-t) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$ であるとき，$R(\omega)$ および $X(\omega)$ を導出せよ。
   また，$R(\omega)$ の実部および $X(\omega)$ の虚部の概形を ω の関数としてそれぞれ図示せよ。
4. $r(t) = \begin{cases} 1/4 & (|t| \leq 2) \\ 0 & (|t| > 2) \end{cases}$ であるとき，$R(\omega)$ および $X(\omega)$ を導出せよ。
   また，$R(\omega)$ の実部および $X(\omega)$ の虚部の概形を ω の関数としてそれぞれ図示せよ。

第 6 問

レストランへの来客時刻の分布について考える。客は必ず 1 人ずつ来店するものとする。n_0番目の客が時刻t_0に来店したとする。このとき，(n_0+n)番目$(n\geq 1)$の客が時刻(t_0+t)に来店する確率密度を$f_n(t)$とおく。$t>0$である。$f_1(t)$は，n_0, t_0によらず，

$$f_1(t)=\lambda e^{-\lambda t} \tag{1}$$

に従うものとする。ここでeは自然対数の底，λは正の定数である。以下の問いに答えよ。

I. (n_0+1)番目の客が来店する時刻の期待値を求めよ。

II. $f_2(t)=\lambda^2 te^{-\lambda t}$，$f_3(t)=\dfrac{1}{2}\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}$，$f_4(t)=\dfrac{1}{6}\lambda^4 t^3 e^{-\lambda t}$ となることを示せ。

III. II の結果から$f_n(t)$の関数形を類推し，その関数形が正しいことを帰納法により証明せよ。

IV. 時刻t_0からt_0+T $(T>0)$までの時間(t_0, t_0+T)に，新しく来店した客の数をmとする。mの確率分布$h(m,T)$がポアソン分布

$$h(m,T)=\frac{1}{m!}(\lambda T)^m e^{-\lambda T} \tag{2}$$

に従うことがわかっている。このとき，mの期待値を求めよ。ただし，$e^{\alpha}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}$を用いてよい。

草 稿 用 白 紙