平成26年度

大学院入学試験問題

数学

午後１：00～３：30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ６問のうち，任意の３問を選んで解答すること。
4. 解答用紙３枚が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

草 稿 用 白 紙

第1問

I. 次の微分方程式について，以下の問いに答えよ。

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = R(t) \tag{1}$$

1. $R(t) = 0$ の場合，一般解を求めよ。
2. $R(t) = 3t^2$ の場合，一般解を求めよ。

II. 次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ。ただし，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ とする。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\dfrac{dx}{dt} - 3y + 2 \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx}{dt} + 2y \\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{2}$$

1. 式 (2) の連立微分方程式を $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$ の形に変形する。ただし，$\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

と定義する。$\boldsymbol{A}$ は定数行列，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は定数ベクトルである。$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を求めよ。

2. $e^{t\boldsymbol{A}}$ のすべての行列要素を求めよ。ただし，e は自然対数の底である。
3. 問題1と2の結果を用いて，式 (2) の連立微分方程式を解け。

第2問

m と n を正の整数とする。ただし，$m > n$ とする。m 行 n 列の実数行列 $\boldsymbol{A}$ を考える。$\boldsymbol{A}$ の階数が n であるとき，以下の問いに答えよ。

I. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ は対称行列であることを示せ。ただし，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{A}$ の転置行列である。

II. 任意の実数列ベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対して $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} > 0$ が成立するような実対称行列 $\boldsymbol{C}$ を正定値行列と呼ぶ。$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ は正定値行列であることを示せ。

III. 正定値行列の全ての固有値が正となることを示し，これを用いて正定値行列は逆行列を持つことを示せ。

IV. ある m 次元実数列ベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{x}$ に関する線形方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす解が必ずしも存在するとは限らない。そこで，近似的な解として

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b}) \tag{1}$$

を最小にする $\boldsymbol{x}'$ を考える。そのような $\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて表せ。

第3問

I. 留数定理を用いて次の積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 4\theta}{1+\cos^2\theta}\,d\theta \tag{1}$$

II. 次の積分の値を求めよ。

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z^2(1-z^2)}\,dz \tag{2}$$

ただし, e は自然対数の底, i は虚数単位である。また, C は図 3.1 に示す複素平面上の閉経路とする。

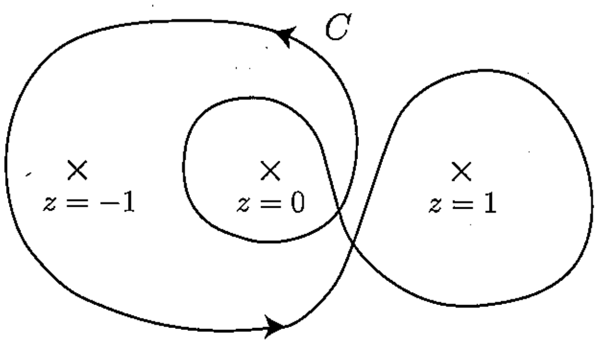

図 3.1

III. 線形分数変換に関する以下の問いに答えよ。

1. 線形分数変換 $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ により, 複素平面上の領域 $D_1 = \{z \,|\, |z| < 1\}$ および $D_2 = \{z \,|\, \mathrm{Re}\, z < 0\}$ がそれぞれどのような領域に変換されるかを示せ。ただし, $\mathrm{Re}\, z$ は複素数 z の実部を表す。
2. 線形分数変換 $w = \dfrac{z-\alpha}{\alpha z - 1}$ により, 複素平面上の環状の領域 $D_3 = \{z \,|\, \beta < |z| < 1\}$ が2つの円に挟まれた領域 $D_4 = \{w \,|\, |w - \frac{1}{4}| > \frac{1}{4},\ |w| < 1\}$ に変換されるとする。このとき α, β の値を求めよ。ただし α, β は正の実数とする。

草　稿　用　白　紙

第4問

xyz 座標系における図形に関して以下の問いに答えよ。ただし，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。

I. z 軸上の点 $(0, 0, v)$ を通り，方向 $(\cos v, \sin v, 0)$ をもつ直線 L_v を考える。L_v の媒介変数表示は，媒介変数を u として，次式で与えられる。

$$\boldsymbol{L}_v(u) = u \cos v \, \boldsymbol{i} + u \sin v \, \boldsymbol{j} + v \, \boldsymbol{k} \tag{1}$$

v を連続的に変化させたときの L_v の軌跡は，常螺旋面と呼ばれる曲面 S となる。S の媒介変数表示は，媒介変数を u, v として，次式で与えられる。

$$\boldsymbol{S}(u, v) = u \cos v \, \boldsymbol{i} + u \sin v \, \boldsymbol{j} + v \, \boldsymbol{k} \tag{2}$$

点 $\boldsymbol{S}(u, v)$ における S の法線ベクトルを求めよ。

II. $\{\boldsymbol{S}(u, v) | -1 \leq u \leq 1, \ 0 \leq v \leq 2\pi\}$ で定義される S 上の領域の面積を求めよ（図 4.1 を参照）。ただし積分の際に，変数置換 $\{u \to t : u = \sinh t\}$ を用いてもよい。

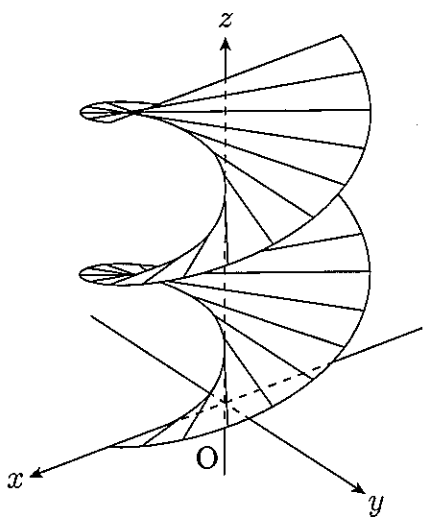

図 4.1

III. $\boldsymbol{S}(u,v)$ において $u=1$ と固定すると，v を媒介変数として，常螺旋と呼ばれる曲線 R が得られる。R は，$\boldsymbol{R}(v)=\boldsymbol{S}(1,v)=\cos v\,\boldsymbol{i}+\sin v\,\boldsymbol{j}+v\,\boldsymbol{k}$ のように表される。この曲線 R 上の点 $\boldsymbol{R}(v)$ における接線 T_v を考える。w を媒介変数として，$\boldsymbol{T}_v(0)=\boldsymbol{R}(v)$ を満たすような T_v の媒介変数表示 $\boldsymbol{T}_v(w)$ を求めよ。

IV. v を連続的に変化させたときの T_v の軌跡も曲面となる。この曲面 D の媒介変数表示は，v と w を媒介変数として次式のように表される。

$$\boldsymbol{D}(v,w)=\boldsymbol{T}_v(w) \tag{3}$$

1. 点 $\boldsymbol{D}(v,w)$ における D の法線ベクトルを求めよ。ただし $w\neq 0$ とする。
2. 任意の $w_1\neq 0$, $w_2\neq 0$, v に対して，点 $\boldsymbol{D}(v,w_1)$ と点 $\boldsymbol{D}(v,w_2)$ における D の法線ベクトルは互いに平行であることを示せ。

第5問

以下の問いに答えよ。導出過程も示すこと。ただし，e は自然対数の底とする。

I. t を実数とする。2つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ の畳み込み積分は，

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau \tag{1}$$

によって定義される。この定義に従って，$f(t)$，$g(t)$ が以下のように与えられたときの畳み込み積分を求めよ。ただし，ω は実数の定数である。

1. $f(t) = \cos(\omega t)$, $g(t) = \sin(\omega t)$
2. $f(t) = e^t$, $g(t) = e^{-t}$

II. 関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s) = L[f(t)]$ は次式で定義される。ただし s は複素数である。

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt \tag{2}$$

また，式(1)で定義された畳み込み積分 $(f*g)(t)$ について，

$$L[(f*g)(t)] = L[f(t)]\,L[g(t)] \tag{3}$$

が成り立つ。今，2つの関数 $q(t)$ と $r(t)$ を下のように定める。

$$q(t) = u(t) - u(t-1) \tag{4}$$

$$r(t) = t + \sin(2\pi t) \tag{5}$$

ただし，$u(t)$ は以下のように定義される。

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t \le 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \tag{6}$$

1. $0 \le t < 4$ の範囲で $q(t)$ および $r(t)$ の概形をそれぞれ図示せよ。
2. $q(t)$ および $r(t)$ のラプラス変換を求めよ。
3. $y(t) = (q*r)(t)$ と定義する。$y(t)$ を求めよ。また，$0 \le t < 4$ の範囲でその概形を図示せよ。必要があれば，$a \ge 0$ に対して $L[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s)$ が成り立つことを用いよ。

III. 次の積分方程式の解 $x(t)$ を求めよ。

$$x(t) + 2\,e^{t}\int_0^{t} x(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau = t\,e^{t} \tag{7}$$

第6問

確率pで表，$1-p$で裏の出るコインをn回投げたとき，ちょうどk回表が出る確率を$P_n(k)$と表すとする。$0<p<1$および$0 \leq k \leq n$とし，eは自然対数の底とする。このとき，以下の問いに答えよ。

I. $P_n(k)$を求めよ。

II. n回コインを投げたとき，表の出る回数の期待値μは，

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} k P_n(k) \tag{1}$$

と定義される。$\mu = np$となることを証明せよ。

III. xを$0<x<1$を満たす実数とする。このとき

$$I(x) = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{n}\log_e P_n(\lfloor xn \rfloor)\right] \tag{2}$$

を求めよ。ここで，$\lfloor y \rfloor$は実数yを超えない最大の整数を表す。さらに，$I(x)$の最小値を与えるxを求めよ。ただし，整数$m \gg 1$に対するスターリングの公式$m! \approx \sqrt{2\pi m}(m/e)^m$を用いてもよい。

IV. $\psi_n(\theta) = \log_e\left[\sum_{k=0}^{n} e^{\theta k} P_n(k)\right]$とする。ただし$\theta$は実数とする。$\psi_n(\theta)$を求めよ。

また$\psi(\theta) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\psi_n(\theta)$とするとき，$\psi^*(\eta) = \max_{\theta}[\theta\eta - \psi(\theta)]$を求めよ。ただし$0<\eta<1$とする。ここで$\max_{\theta} f(\theta)$は関数$f(\theta)$の最大値を表す。

草 稿 用 白 紙