2020 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

物 理 学

午後 1：00 ～ 3：00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 4 問のうち，任意の 2 問を選んで解答すること。
4. 解答用紙 2 枚が渡される。1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号（1 問，2 問，3 問，4 問）および修士課程と博士課程の区別（修士，博士）に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，正しく切り取ること。したがって，解答用紙 1 枚につき 2 ヶ所切り取ることとなる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

図 1.1 のように，円筒内部に円柱を包含した物体 A を考える。具体的には，外半径 $2r$，内半径 r の円筒の内部に，半径 r の円柱が，両者の中心軸を一致させた形で包含されている。円筒，円柱は，一様な同一材質からなる剛体である。円筒，円柱の質量をそれぞれ，$3m$, m とする。円筒内面と円柱外面との隙間量は無視でき，円柱は，円筒内部において回転できる。

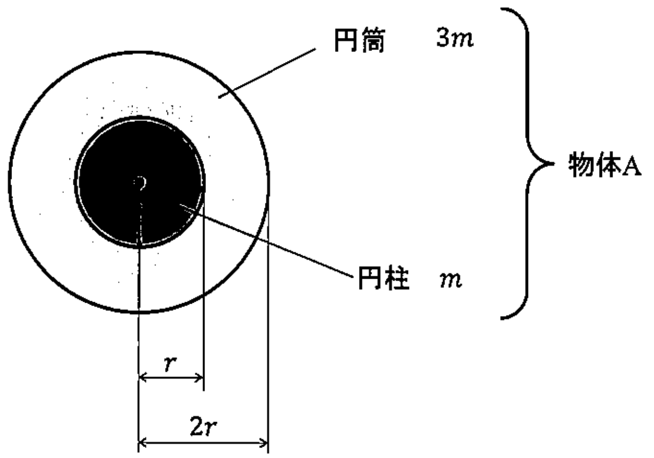

図 1.1

I. 円筒の中心軸周りの慣性モーメント I_{T} ，円柱の中心軸周りの慣性モーメント I_{C} をそれぞれ求めよ。また導出過程を示せ。

II. 図 1.2 のような水平面 QR と水平面からの角度θを有する斜面 PQ を考える。斜面 PQ には摩擦があり，水平面 QR には摩擦がないものとする。また，物体 A は，接触を保ちつつ斜面と水平面上を運動できるものとし，物体 A の斜面上の運動から水平面上の運動への遷移過程ではエネルギー損失はないものとする。重力加速度を g とする。

以降の問題において，物体 A が水平面に置かれたときの中心軸の高さを 0 とする。また，円筒および円柱の中心軸周りの慣性モーメントを，それぞれ I_T，I_C として解答しても良い。

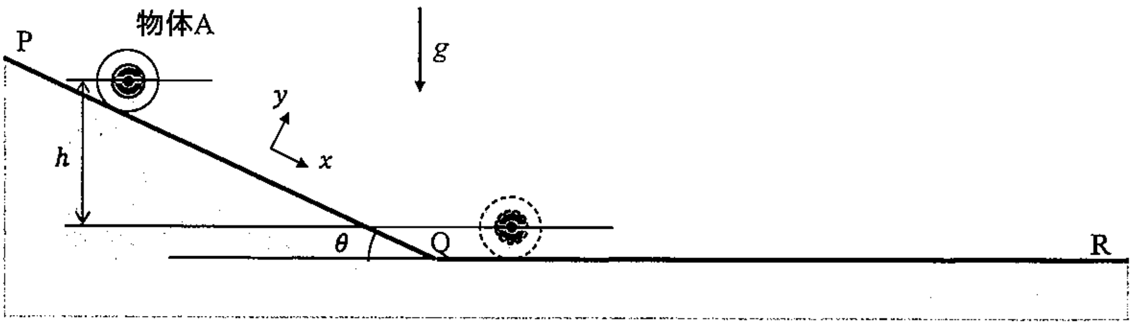

図 1.2

1. 円筒内面と円柱外面との間の摩擦は無視でき，円筒内部を円柱が同一中心軸周りに，滑らかに回転できる場合を考える。図 1.2 のように円筒，円柱がともに回転していない状態で，その中心軸の高さが h となるように，物体 A を斜面 PQ 上に静かに置いたところ，物体 A の外側の円筒が斜面 PQ に対して滑らず転がりだした。

   水平面に達した直後の物体 A の重心の水平面に沿った並進速度 v_1，円筒の中心軸周りの角速度 ω_{T1}，円柱の中心軸周りの角速度ω_{C1}を求めよ。

2. 次に，円筒内部で円柱が同一中心軸周りに回転できるが，円筒内面と円柱外面との間に摩擦が働く場合を考える。円筒と円柱の間に動摩擦力が働き，その大きさを f として扱えることとする。この物体 A を，図 1.2 のように，円筒，円柱がともに回転していない状態で，その中心軸の高さが h となるように，斜面 PQ 上に静かに置いたところ，物体 A の外側の円筒が斜面 PQ に対して滑らず転がりだした。このとき，外側の円筒に対して異なる角速度で，内側の円柱が滑りながら回転する様子が観察された。以下の問いに答えよ。
   (i) 斜面 PQ 上の物体 A の運動について考える。図 1.2 のように斜面 PQ に対して平行にx 軸を，垂直に y 軸をなす座標系を考える。

物体 A の重心の斜面に沿った並進速度を v，円筒と円柱の，それぞれ中心軸周りの角速度をω_{T}，ω_{C}，円筒と円柱との間に作用する力の合力の x 成分，y 成分をそれぞれ N_{x}，N_{y}，斜面から円筒に作用する垂直抗力，摩擦力をそれぞれ N_{PQ}，F_{PQ}とする。

① x 方向，y 方向に対する円筒の重心運動が満足する運動方程式，および円筒の中心軸周りの回転の運動方程式を示せ。また v と ω_{T} の間の関係式を示せ。

② x 方向，y 方向に対する円柱の重心運動が満足する運動方程式，および円柱の中心軸周りの回転の運動方程式を示せ。

(ii) 水平面 QR 上の物体 A の運動について考える。以降の問題では，水平面に達した直後の，物体 A の重心の水平面に沿った並進速度，円筒および円柱の中心軸周りの角速度を，それぞれ v_{Q}，ω_{TQ}，ω_{CQ}として解答せよ。物体 A が水平面 QR 上を進む間に，円筒と円柱，それぞれの中心軸周りの角速度が等しくなった。

① 物体 A の重心の水平面に沿った並進速度 v_{R} およびその中心軸周りの角速度 ω_{R} を求めよ。

② 水平面 QR 上の運動における，円筒内面と円柱外面との間の動摩擦力によるエネルギー損失を求めよ。

第 2 問

導体に電流が流れるとき，導体内部の電場や電流密度は，周波数に依存した空間分布を示す。以下の問いではこの現象について考える。図 2.1 に示すように，真空中の領域$-h \leq y \leq h$ （ただし$h \neq 0$）を満たす導電率σの導体がある。導体はx方向とz方向に無限の長さを有している。z方向に電場E_{z}が与えられ，これが導体内に電流密度$j_{\mathrm{z}} = \sigma E_{\mathrm{z}}$を生じている。導体の誘電率と透磁率はそれぞれ真空の誘電率ε_0と真空の透磁率μ_0に等しい。対称性から，j_{z}がつくる導体内部と外部の磁束密度はx成分のみを持ち，これを$B_{\mathrm{x}}(y)$と表す。E_{z}は$+z$の向きを正，B_{x}は$+x$の向きを正とする。

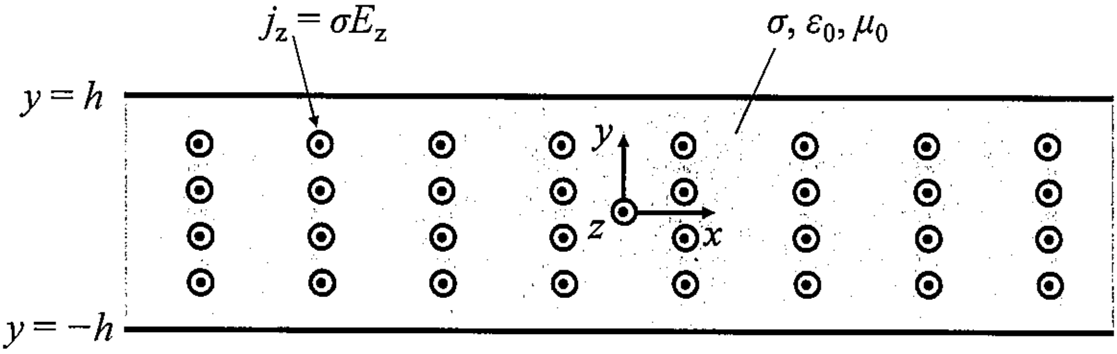

図 2.1

I. 電場E_{z}が一様な静電場である場合を考える。

1. 導体内部の単位体積あたり，単位時間あたりに生じる発熱量を，σ と j_{z} を用いて表せ。
2. 導体外部$y < -h$，導体内部$-h \leq y \leq h$，導体外部$y > h$ について，磁束密度B_{x}をyの関数として求めよ。対称性から $B_{\mathrm{x}}(-y) = -B_{\mathrm{x}}(y)$であることを用いてよい。

II. 電場が時間的に変化する場合を考える。このとき，導体内部の電場や電流密度は必ずしも一様にならない。電場と磁束密度がともに角周波数ωで振動しており，複素変数$\tilde{E}$と$\tilde{B}$を用いてそれぞれ$E_z = \mathrm{Re}\{\tilde{E}\exp(i\omega t)\}$,　$B_x = \mathrm{Re}\{\tilde{B}\exp(i\omega t)\}$と表せるものとする。$i$ を虚数単位とする。

1. 上述の特性を持つ導体の内部において，マクスウェルの方程式は，次の 2 つの式を含む。

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{1}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

ここで$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{j}$はそれぞれ電場，磁場，電流密度である。これらの式(1)と(2)をもとに，複素電場$\tilde{E}$が次の式(3)を満たすことを示せ。電場のx成分とy成分はゼロ，磁束密度のy成分とz成分はゼロであり，$\partial E_z/\partial x = \partial E_z/\partial z = 0$,　$\partial B_x/\partial x = \partial B_x/\partial z = 0$と仮定してよい。

$$\frac{d^2\tilde{E}}{dy^2} + (\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - i\omega\mu_0\sigma)\tilde{E} = 0 \tag{3}$$

2. 導体が金属であり，導電率が十分に高い場合（$\sigma \gg \varepsilon\omega$），式(3)を次のように近似することができる。

$$\frac{d^2\tilde{E}}{dy^2} - i\alpha^2\tilde{E} = 0 \tag{4}$$

ここで$\alpha = (\omega\mu_0\sigma)^{\frac{1}{2}}$である。この微分方程式の一般解を求めよ。

3. 導体には，x方向の単位長さあたり$2h\mathrm{Re}\{j_c\exp(i\omega t)\}$の電流が流れている。ここで$j_c$は実定数である。すなわち複素電場は

$$\int_{-h}^{h} \sigma\tilde{E}\,dy = 2hj_c \tag{5}$$

を満たす。対称性から$\tilde{E}(-y) = \tilde{E}(y)$としてよい。このとき，導体内部における式(4)の解を求めよ。なお
$\cosh(\beta) = \big(\exp(\beta) + \exp(-\beta)\big)/2$,　$\sinh(\beta) = \big(\exp(\beta) - \exp(-\beta)\big)/2$

等の表記を用いてもよい。ここでβは複素数である。

4. 導体内部において，中央（$y=0$）および上部表面（$y \to h$）における電場の振幅の 2 乗を，それぞれ$\left|\tilde{E}(0)\right|^2$および$\left|\tilde{E}(h)\right|^2$とする。

(i) 電場の角周波数ωが低いとき（$\omega \to 0$）の電場について，次の選択肢から正しいものを選べ。その理由も述べよ。

a. $\left|\tilde{E}(0)\right|^2 \ll \left|\tilde{E}(h)\right|^2$

b. $\left|\tilde{E}(0)\right|^2 \approx \left|\tilde{E}(h)\right|^2$

c. $\left|\tilde{E}(0)\right|^2 \gg \left|\tilde{E}(h)\right|^2$

(ii) 電場の角周波数ωが高いとき（$\omega \gg \frac{1}{\mu_0 \sigma h^2}$）の電場について，次の選択肢から正しいものを選べ。その理由も述べよ。

a. $\left|\tilde{E}(0)\right|^2 \ll \left|\tilde{E}(h)\right|^2$

b. $\left|\tilde{E}(0)\right|^2 \approx \left|\tilde{E}(h)\right|^2$

c. $\left|\tilde{E}(0)\right|^2 \gg \left|\tilde{E}(h)\right|^2$

第 3 問

式(1)の状態方程式で記述される完全気体および式(2)の状態方程式で記述されるファンデルワールス気体を考える。

$$PV = nRT \tag{1}$$
$$\left\{P + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right\}(V - nb) = nRT \tag{2}$$

ここで，Pは圧力，Vは体積，nは物質量（モル数），Rは気体定数，Tは熱力学温度である。また，a，bは定数である。これらの気体に対して，熱力学第一法則により準静的な変化において以下の式が成り立つ。

$$dU = TdS - PdV \tag{3}$$

ここで，Uは内部エネルギー，Sはエントロピーである。以下の問いに答えよ。ただし定容比熱C_{V}は以下で定義され，定数である。

$$C_{\mathrm{V}} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{4}$$

I. 完全気体およびファンデルワールス気体両方に対して成り立つ関係式について考える。式(3)より，$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$は式(5)のように表される。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \tag{5}$$

式(5)とマクスウェルの関係式の 1 つである$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$を用いると，式(6)で表される，直接測定が困難なエントロピーSを含まない熱力学的状態方程式を得ることができる。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \tag{6}$$

完全気体，ファンデルワールス気体それぞれに対して，$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$を求めよ。

II. 準静的膨張での実在気体効果を考える。シリンダ内において初期状態として，圧力P_0，体積V_0，熱力学温度T_0，単位物質量（1mol）の気体がピストンの移動により準静的に膨張する。系は外界から断熱されている。以下の問いに答えよ。

1. 図 3.1 に示されるように体積がV_0から $2V_0$に変化したとき，完全気体およびファンデルワールス気体それぞれに対して熱力学温度Tおよびエントロピー変化ΔSを求めよ。

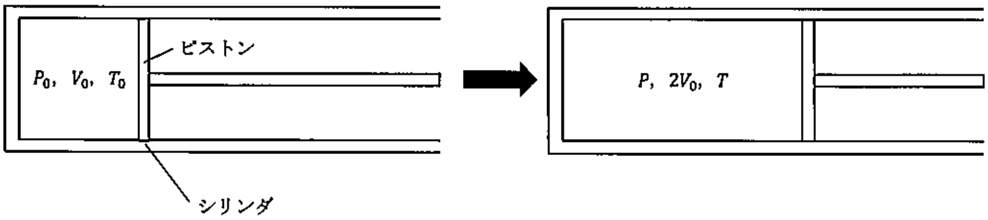

図 3.1

2. 図 3.2 に示されるようにシリンダ内にヒータを設置し，熱力学温度をT_0で一定のまま体積がV_0から $2V_0$になるまで膨張させた。完全気体およびファンデルワールス気体それぞれに対して内部エネルギー変化ΔUとエントロピー変化ΔSを求めよ。また，完全気体とファンデルワールス気体の内部エネルギー変化ΔUが異なる理由を述べよ。

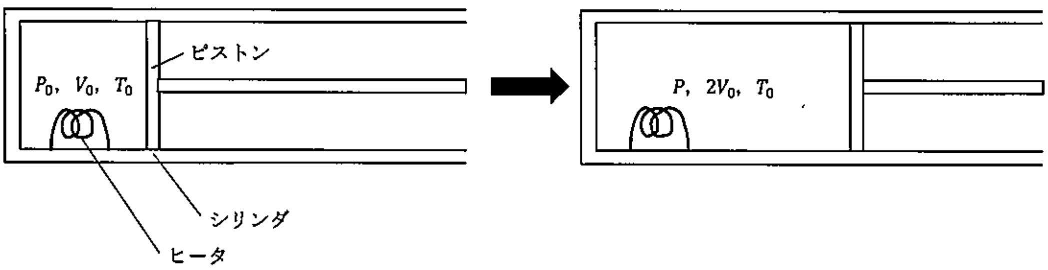

図 3.2

III. 図 3.3 に示されるように，体積V_0の容器 A および容器 B がバルブを介して連結されている。容器 A には初期状態として，圧力P_0，体積V_0，熱力学温度T_0，単位物質量（1mol）の完全気体が満たされており，容器 B は真空である。バルブを開いて気体を膨張させた。系は外界から断熱されている。以下の問いに答えよ。

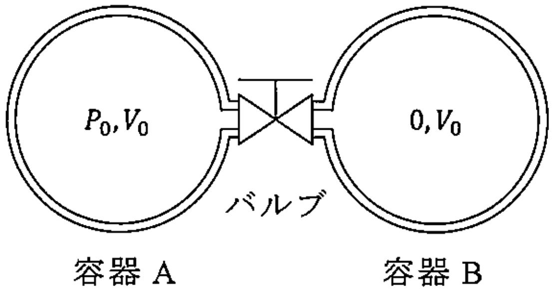

図 3.3

1. この過程において一定となる熱力学関数（状態量）を示せ。
2. 膨張後の熱力学温度Tおよびエントロピー変化ΔSを求めよ。
3. この変化が不可逆であることを根拠と共に述べよ。

第 4 問

図 4.1 に示すように，長さLの棒状の部材が両端において支点 A と支点 B で支持されており，これらの支点においてモーメントがかからないものとする。

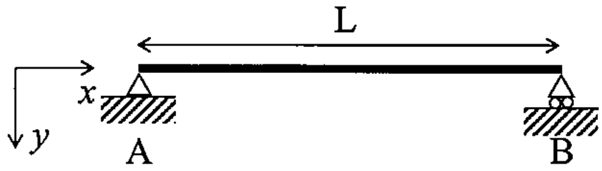

図 4.1

I. この部材に図 4.2 のように長手方向の単位長さあたり$q(x)$の分布荷重がy方向に作用しているときの曲げ変形について考える。ただし，部材の変形は微小変形を想定し，y方向への変位のみを考える（図 4.2 のように下方向を正とする）。また部材の質量は無視できる。以下の問いに答えよ。

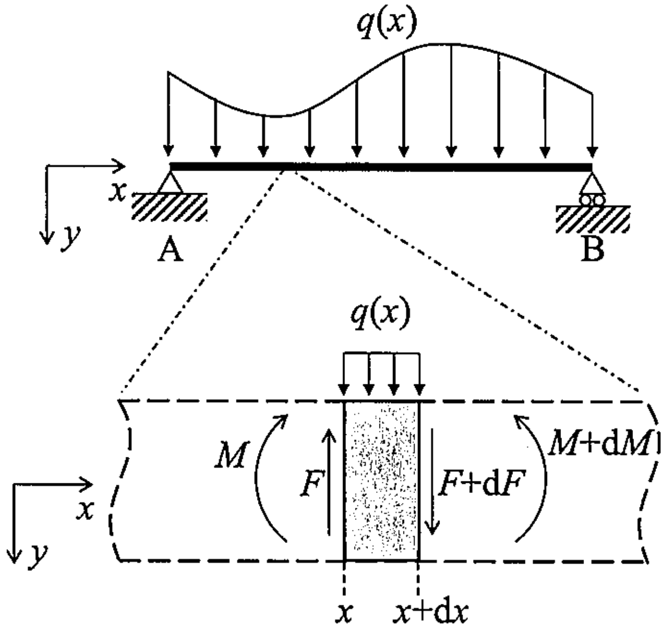

図 4.2

1.　この部材の任意の位置xにおける微小領域について考える。図4.2 のように，部材の断面に力FとモーメントMが作用し，静的につり合っていると仮定する。

(i) このとき，力Fと分布荷重$q(x)$の間に式(1)が成立することを示せ。

$$\frac{dF}{dx} = -q(x) \tag{1}$$

(ii) このとき，モーメントMと力Fの間に式(2)が成立することを示せ。

$$\frac{dM}{dx} = F \tag{2}$$

2.　部材の曲げ変形が微小である場合，部材はモーメントMのみを受けて変形するとみなせる。このとき，変位yとモーメントMの間に式(3)の関係が成立する。ここで，Rは定数である。分布荷重として$q(x) = \mathrm{k}$（一定）が作用している場合，この部材に生じる変位の最大値を求めよ。ただし，部材の両端において$y = 0$である。

$$\mathrm{R}\frac{d^2y}{dx^2} = -M \tag{3}$$

II.　次に図 4.1 と同様に両端を支持された長さLの部材の曲げ振動について考える。ここでは自由振動を考える。部材は一様であり，部材の密度をρ，断面積をSとする。また，部材の変形は微小変形を想定し，y方向への運動のみを考える。重力は無視できる。以下の問いに答えよ。

1.　図 4.3 に示すような部材の微小領域の運動を考える。図中の微小領域の運動方程式を考え，式(2)および式(3)を用いることで，部材の曲げ振動のy方向への運動方程式が式(4)で表せることを示せ。ただし，微小領域はy方向のみに運動するものとし，x方向の力やモーメントによる回転はないものとする。

$$\mathrm{R}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho\mathrm{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

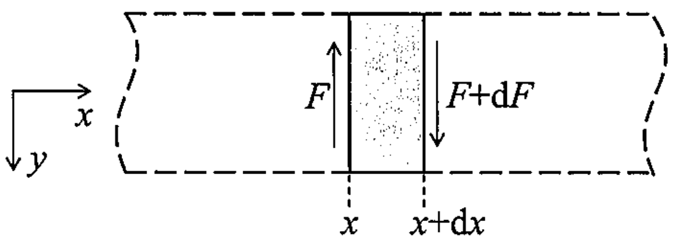

図 4.3

2.　II. 1 で求めた式(4)の解を$y(x,t) = X(x)\exp(i\omega t)$とおく。$i$ は虚数単位である。このとき式(4)が成立するための一般解$X(x)$ は式(5)となることを示せ。ここで$\mu^4 = \frac{\rho \mathrm{S}\omega^2}{\mathrm{R}}$であり，$\mathrm{C}_1$~$\mathrm{C}_4$ は定数である。
また，$\exp(ix) = \cos x + i\sin x$,
$\sinh x = (\exp(x) - \exp(-x))/2$，$\cosh x = (\exp(x) + \exp(-x))/2$ である。

$$X(x) = \mathrm{C}_1 \sin \mu x + \mathrm{C}_2 \cos \mu x + \mathrm{C}_3 \sinh \mu x + \mathrm{C}_4 \cosh \mu x \tag{5}$$

3.　図 4.1 のように両端を支持された部材の場合，部材の両端において $y = 0$ である。
(i) μ がとりうる値を，式(5)を用いて求めよ。
(ii) II. 3. (i)の結果を用いて曲げ振動の挙動を述べよ。

問 題 訂 正

科目名：物理学

第２問　II. 1.　５行目（５ページ）

（誤）… それぞれ電場，磁場，電流密度である。

（正）… それぞれ電場，磁束密度，電流密度である。

No correction in the English version.

第２問　II. 2.　１行目（５ページ）

（誤）… 導電率が十分に高い場合($\sigma \gg \underline{\varepsilon}\omega$),

（正）… 導電率が十分に高い場合($\sigma \gg \underline{\varepsilon_0}\omega$),

Problem 2　II. 2.　Line 1-2　(Page 6)

(incorrect)... the conductivity is sufficiently high ($\sigma \gg \underline{\varepsilon}\omega$),

(correct)... the conductivity is sufficiently high ($\sigma \gg \underline{\varepsilon_0}\omega$),

2019 年 8 月 27 日

工学系研究科

大学院入試委員会本部