平成28年度

大学院入学試験問題

数　　学

午後１：00～３：30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ６問のうち，任意の３問を選んで解答すること。
4. 解答用紙３枚が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

草 稿 用 白 紙

第 1 問

I. 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{dy}{dx} - y = 9e^{-2x} \tag{1}$$

ただし，eは自然対数の底である。

II. 以下の積分の値を求めよ。

$$\int_0^1 x^m (\log x)^n \, dx \tag{2}$$

ただし，mおよびnは非負の整数とする。

III. 関数$I(m)$を以下のように定義する。

$$I(m) \equiv \int_0^1 x^m \arccos x \, dx \tag{3}$$

ただし，mは非負の整数とし，逆三角関数は主値をとるものとする。

1. $I(0)$の値を求めよ。
2. $I(1)$の値を求めよ。
3. $m \geq 2$のとき，$I(m)$をmと$I(m-2)$を用いて表せ。
4. $I(m)$の値を求めよ。

草 稿 用 白 紙

第 2 問

縦ベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$を考える。

I. $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3)$のとき，式(1)を満たす 3 次元縦ベクトル$\mathbf{x}$を求めよ。

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{1}$$

II. 任意の $m \times n$ 実行列 $\mathbf{B}$ は，ある正規直交行列 $\mathbf{U}(m \times m)$，$\mathbf{V}(n \times n)$を用いて式(2)のような形で表すことができる。

$$\mathbf{B} = \mathbf{U\Sigma V}^T,\quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad r = \mathrm{rank}(\mathbf{B}) \tag{2}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$は正の実数となり，これらを$\mathbf{B}$ の特異値と呼ぶ。ただし，行列$\mathbf{P}$に対して$\mathbf{P}^T$は$\mathbf{P}$の転置行列を表す。このとき，$\mathbf{BB}^T$および$\mathbf{B}^T\mathbf{B}$をそれぞれ行列$\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$，$\mathbf{\Sigma}$およびそれらの転置行列を用いて表せ。

以下の問題では$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2)$とする。

III. $\mathbf{BB}^T$の固有値と各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

IV. $\mathbf{B}$の特異値と式(2)の正規直交行列$\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$を求めよ。

V. 式(3)に示されるノルムを最小化する 2 次元縦ベクトル$\mathbf{x}$を求めよ。

$$\|\mathbf{Bx} - \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{Bx} - \mathbf{b})^T(\mathbf{Bx} - \mathbf{b}) \tag{3}$$

草 稿 用 白 紙

第 3 問

複素z平面のある領域Dを複素w平面のある領域Δに写す写像$w=f(z)$を考える。複素z平面および複素w平面上の点はそれぞれ複素数$z=x+iy$および$w=u+iv$に対応する。ただし，x，y，u，vは実数であり，iは虚数単位である。

I. $w=\sin z$について，以下の問いに答えよ。

1. uおよびvをxとyの関数として表せ。
2. z平面上の領域$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \frac{\pi}{2}, y\ge 0\}$が$w$平面上のどの領域に写されるかについて，$z$平面上の$y\ge 0$における 3 つの半直線$x=0$，$x=\frac{\pi}{2}$，$x=c$の$w$平面上の像を描くことにより示せ。ただし，$c$は$0<c<\frac{\pi}{2}$を満たす定数とする。

II. 平面上の領域Ωにおいて，実関数$g(x,y)$が連続な 1 階および 2 階の偏導関数をもち，ラプラス方程式$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0$を満たすとき，$g(x,y)$を$\Omega$で調和な関数と呼ぶ。

今，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$をz平面上の領域Dで正則な関数とするとき，以下の問いに答えよ。

1. $u(x,y)$および$v(x,y)$はともにz平面上の領域Dで調和な関数であることを示せ。
2. $h(u,v)$がw平面上の領域Δで調和な関数であるとき，$H(x,y)=h(u(x,y),v(x,y))$はz平面上の領域Dで調和な関数であることを示せ。

III. w平面上の領域$\Delta_1=\{(u,v)\,|\,u\ge 0, v\ge 0\}$で定義された以下の境界条件を満たす調和関数$h(u,v)$を考える。

$$h(0,v)=0 \quad (v\ge 0) \tag{1}$$
$$h(u,0)=1 \quad (u\ge 1) \tag{2}$$
$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,0)=0 \quad (0\le u\le 1) \tag{3}$$

1. $z=\arcsin w$，$H(x,y)=h(u,v)$とする。式(1)–(3)に対応する$H(x,y)$についての境界条件を書き下せ。ただし，逆三角関数は主値をとるものとする。
2. 問 III.1 で得られた境界条件を満たすように$H(x,y)$を求めよ。
3. $0\le u\le 1$における$h(u,0)$を求めよ。

第 4 問

3 次元直交座標系 xyz において，式(1)–(3)で示される 3 つの異なる平面の位置関係，およびこれらの 3 平面と式(4)で示される球の位置関係を考える。

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \tag{1}$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \tag{2}$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \tag{4}$$

ただし， a_{ij}， b_i （$i, j = 1, 2, 3$） は定数である。

また，3 平面について， $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ を係数行列，および

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$ を拡大係数行列という。

I. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$， $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -c \end{pmatrix}$ （c は正の定数）について，以下の問いに答えよ。

1. rank($\mathbf{A}$) および rank($\mathbf{B}$) を求めよ。
2. 3 平面のうち，点 P (1, 1, 1)において式(4)で示される球と接する平面を平面 1 とする。また，他の 2 平面のうち，点 **P** との距離が短い方の平面を平面 2 とする。このとき，点 **P** と平面 2 の距離を求めよ。また，この球について，平面 1 と平面 2 の間にある部分の体積を求めよ。

II. 3 平面が一直線で交わるとき， rank($\mathbf{A}$) および rank($\mathbf{B}$) を求めよ。

III. 一般的に 3 平面が異なる 3 点で球と接する場合を考える。このとき，3 平面と球の可能な位置関係をすべて図示せよ。さらに，それぞれの位置関係について， rank($\mathbf{A}$) および rank($\mathbf{B}$) を求めよ。

草 稿 用 白 紙

第 5 問

I. 関数 $f(x)$ は $0 \le x \le \pi$ で定義される連続な関数である。今，$f(x)$ を $-\pi \le x \le \pi$ まで奇関数として拡張すると，以下のようにフーリエ正弦級数に展開できる。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin nx \right) \tag{1}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{2}$$

ただし，$f(0) = f(\pi) = 0$ とする。

1. 以下の関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数展開を求めよ。

$$f(x) = x(\pi - x) \quad (0 \le x \le \pi) \tag{3}$$

2. 問 I.1 で求めた結果を用いて次の等式を導け。

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32} \tag{4}$$

II. 2 変数関数 $f(x, y)$ は $0 \le x \le \pi$ および $0 \le y \le \pi$ で定義される連続な関数である。問 I と同様の方法で，$f(x, y)$ は以下のように 2 重フーリエ正弦級数に展開できる。

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_{mn} \sin mx \sin ny \right) \tag{5}$$

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin mx \sin ny \, dx dy \quad (m, n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{6}$$

ただし，$f(0, y) = f(\pi, y) = f(x, 0) = f(x, \pi) = 0$ とする。

1. 以下の関数 $f(x, y)$ の 2 重フーリエ正弦級数展開を求めよ。

$$f(x, y) = x(\pi - x) \sin y \quad (0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi) \tag{7}$$

2. 関数$u(x,y,t)$は$0 \le x \le \pi$，$0 \le y \le \pi$，$t \ge 0$で定義される。以下の関数$u(x,y,t)$の偏微分方程式を変数分離によって解け。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{8}$$

ただし，cは正の定数とし，境界条件および初期条件は次式の通りとする。

$$u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0 \tag{9}$$
$$u(x,y,0) = x(\pi - x)\sin y \tag{10}$$

第 6 問

会社 A は複数の工場 $i\,(i=1,2,\cdots)$ を有する。今，工場 i における不良品率は P_i であり，工場 i から N_i 個の製品が無作為に抽出され，出荷される状況を考える。ただし，P_i は十分小さく，複数の工場は互いに影響を及ぼさないとする。

I. 工場 i から出荷された N_i 個の製品の中に k 個の不良品が含まれる確率 $f(i,k)$ を示せ。ただし，k は非負の整数とする。

II. $N_i \to \infty$ のとき，$f(i,k) \to \dfrac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^k}{k!}$ となることを示せ。ただし，$\lambda_i = N_i P_i$ であり，λ_i を一定として極限をとるものとする。

以下の問題では $f(i,k) = \dfrac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^k}{k!}$ と近似してよい。

III. 今，表 1 に示されるような 2 つの工場から製品が出荷される状況を考える。このとき，出荷された全製品の中に 2 個の不良品が含まれる確率を求めよ。

表 1

工場番号 (i)	不良品率 (P_i)	出荷数 (N_i)
1	0.01	500
2	0.02	300

IV. 問 III と同様の条件において，出荷された全製品の中に k 個の不良品が含まれる確率を求めよ。

V. 今，5 つの工場 $i\,(i=1,2,3,4,5)$ において $P_i = 0.001\,i$ であり，全工場から同じ個数（N_c 個）の製品が出荷される状況を考える。
このとき，出荷された全製品の中に含まれる不良品数の期待値が 3 以下となるような N_c の最大値を求めよ。

草 稿 用 白 紙

草 稿 用 白 紙

草 稿 用 白 紙

草 稿 用 白 紙