2025 年 度
大 学 院 入 学 試 験 問 題
数　　学

13：00 ～ 15：30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 日本語または英語で解答すること。日本語の問題文は 2–12 ページ，英語の問題文は 16–26 ページにある。
4. 6 問のうち，社会基盤学専攻の受験生は任意の 1 問を，それ以外の受験生は任意の 3 問を選んで解答すること。
5. 解答用紙は，社会基盤学専攻の受験生には 1 枚，それ以外の受験生には 3 枚渡される。問題（第 1 問から第 6 問）ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
6. 解答用紙左上の枠にその用紙で解答する問題番号（1 から 6）を記入すること。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に受験番号を記入すること。
8. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
9. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
10. 試験終了後，解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

Instructions in English are on the back cover.

草稿用白紙
BLANK PAGE

第1問

I. 以下の微分方程式の一般解 $y(x)$ を求めよ。

1. $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=\left(\frac{y}{x}\right)^3 \tag{1}$$

2. $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6\left[y+\cos(3x)\right]=0 \tag{2}$$

II. xy 直交座標平面上の原点 O を極, x 軸の正の部分を始線とする極座標系 (r,θ) において, 以下の極方程式で与えられる曲線 C を考える。

$$r=2+\cos\theta \ \ (0\le\theta<2\pi) \tag{3}$$

1. 曲線 C が囲む領域の面積を求めよ。
2. 曲線 C 上の点 $(r,\theta)=\left(\dfrac{4+\sqrt{2}}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ における接線を考える。xy 直交座標系におけるこの接線の傾きを求めよ。

草稿用白紙
BLANK PAGE

第2問

正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対し，$e^{\boldsymbol{A}}$ を

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k \tag{1}$$

で定義する。ここで，$\boldsymbol{E}$ は単位行列，e は自然対数の底である。

I. $\boldsymbol{A}$ を正則行列 $\boldsymbol{P}$ で対角化可能な3行3列の正方行列とし，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ と表したとき，$\boldsymbol{D}$ は対角行列で，

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

と書けるとする。ただし，λ_1，λ_2，λ_3 は複素数とする。このとき，

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} \tag{3}$$

となることを証明せよ。

II. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -5 & 8 & 10 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ とする。

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ をみたす正則行列 $\boldsymbol{P}$ と対角行列 $\boldsymbol{D}$ を求めよ。
2. $e^{\boldsymbol{A}}$ を計算せよ。

III. x を実数として，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ e \end{pmatrix}$ とする。以下ではベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を $\boldsymbol{v}^T$ と書く。

1. $e^{\boldsymbol{A}}$ の固有値の和を e と x を用いて表せ。
2. $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}e^{\boldsymbol{A}}$ とする。3次元実ベクトル $\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0})$ について，$\dfrac{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}$ の最大値および最小値を求めよ。
3. 3次元実ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ およびIII.2で用いた $\boldsymbol{C}$ に対して，$f(\boldsymbol{z}) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{z}$ とおく。$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial z_1} = \dfrac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial z_2} = \dfrac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial z_3} = 0$ となる $\boldsymbol{z}$ について $\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$ を求めよ。

草稿用白紙
BLANK PAGE

第3問

以下では z を複素数, i を虚数単位とする。複素関数

$$f(z) = \frac{\cot z}{z^2} \tag{1}$$

についての以下の問いに答えよ。ただし, $\cot z = \dfrac{1}{\tan z}$ である。また, 正の整数 m に対して

$$D_m = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\left(z \cot z\right) \tag{2}$$

とおく。必要であれば $D_2 = -\dfrac{2}{3}$ および整数 n に対して

$$\lim_{z \to n\pi} \frac{z - n\pi}{\sin z} = (-1)^n \tag{3}$$

であることを用いてもよい。

I. $f(z)$ の極をすべて求め, それぞれの極の位数を求めよ。

II. I で求めた極それぞれの留数を求めよ。

III. M を正の整数として $R = \pi(2M+1)$ とおく。図 1 に示すように, $-\dfrac{R}{2} \leq t \leq \dfrac{R}{2}$ の範囲を動く t を媒介変数とする次の 4 つの線分 C_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ を考える。

$$C_1 : z(t) = \frac{R}{2} + it \tag{4}$$

$$C_2 : z(t) = -t + i\frac{R}{2} \tag{5}$$

$$C_3 : z(t) = -\frac{R}{2} - it \tag{6}$$

$$C_4 : z(t) = t - i\frac{R}{2} \tag{7}$$

ただし, いずれの線分も始点は $t = -\dfrac{R}{2}$, 終点は $t = \dfrac{R}{2}$ に対応する点とする。C_k に沿った複素積分 $I_k = \displaystyle\int_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ それぞれに対して, $\displaystyle\lim_{M \to \infty} I_k$ の値を求めよ。

IV. III の 4 つの線分 C_1, C_2, C_3, C_4 をつなげてできる閉曲線を C とする。この閉曲線 C に沿った複素積分 $I = \displaystyle\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ に対して留数定理を用いることで, 次の無限級数の値を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{8}$$

V. $f(z)$ の代わりに, 複素関数

$$g(z) = \frac{\cot z}{z^{2N}} \tag{9}$$

を用いる。ただし N は正の整数である。I–IV と同様の手順により, 次の無限級数の値を D_m を用いて表せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2N}} \tag{10}$$

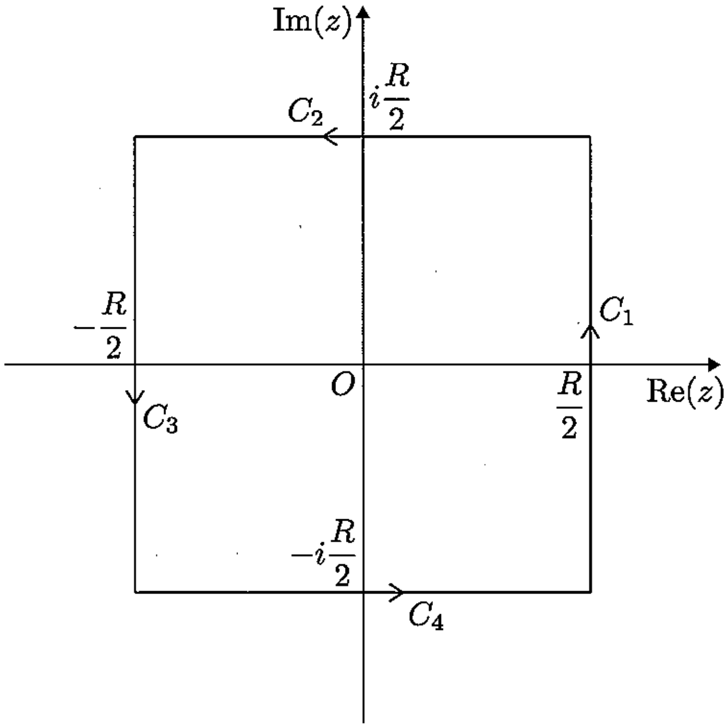

図 1

第4問

3次元直交座標系 xyz において，以下の式により定義される曲面 S を考える。

$$\begin{pmatrix} x(\theta,\phi) \\ y(\theta,\phi) \\ z(\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi + 2 \\ 0 \\ \sin\phi \end{pmatrix} \tag{1}$$

ただし，θ, ϕ は曲面 S の媒介変数であり，$0 \leq \theta < 2\pi$，$0 \leq \phi < 2\pi$ とする。また曲面 S で囲まれた領域を V, 不等式 $x^2 + y^2 \leq 4$ を満たす領域を W とする。曲面 S に関する以下の問いに答えよ。

I. 曲面 S 上の点 $P \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ において，領域 V の内側を向いた単位法線ベクトルを求めよ。

II. 曲面 S において，領域 W に含まれる部分の面積を求めよ。

III. 二つの領域 V と W の共通部分の体積を求めよ。

IV. $\theta = \phi$ として定義される曲面 S 上の3次元曲線 C を考える。曲線 C 上の点 $Q \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ における，曲線 C の曲率を求めよ。

なお一般に，媒介変数 t で表現された3次元曲線が $\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ で与えられているとき，その曲線上の点 $\boldsymbol{c}(t)$ における曲線の曲率 $\kappa(t)$ は以下の式により計算できる。

$$\kappa(t) = \frac{\left| \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}(t)}{\mathrm{d}t} \times \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{c}(t)}{\mathrm{d}t^2} \right|}{\left| \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}(t)}{\mathrm{d}t} \right|^3} \tag{2}$$

草稿用白紙
BLANK PAGE

第5問

実数 t に対して $|f(t)|$ および $|f(t)|^2$ が積分可能な関数 $f(t)$ を考える。$f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ と表し，以下の式で定義する。

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

ただし，ω は実数, i は虚数単位である。このとき以下の式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{2}$$

また，$f(t)$ の自己相関関数 $R_f(\tau)$ を以下の式で定義する。

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)\mathrm{d}t \tag{3}$$

ただし，τ は実数である。

I. $f(t)$ が以下の式で定義される場合を考える。

$$f(t) = \begin{cases} \cos(at) & (|t| \leq \dfrac{\pi}{2a}) \\ 0 & (|t| > \dfrac{\pi}{2a}) \end{cases} \tag{4}$$

ただし，a は正の実定数である。以下を求めよ。

1. $F(\omega)$
2. $R_f(\tau)$
3. $\mathcal{F}[R_f(\tau)]$

II. 以下の積分の値を求めよ。ただし, I の結果を利用しても良い。

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^4 \frac{\pi x}{2}}{(x^2-1)^4}\mathrm{d}x$

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

第6問

0または1の値をとる確率変数の列が次の手順にしたがって生成されるとする。なお，整数 $n \geq 1$ について，この手順から生成される確率変数の列の n 番目の確率変数を X_n と表す。

- X_1 は，確率 $\dfrac{2}{3}$ で $X_1 = 0$ となり，確率 $\dfrac{1}{3}$ で $X_1 = 1$ となる。
- 整数 $n = 1, 2, \ldots$ について順に，この手順が終了するまで以下が繰り返される。
  - $X_n = 0$ なら確率 p $(0 < p < 1)$ で，$X_n = 1$ なら確率 q $(0 < q < 1)$ でこの手順を終了する。ここで，p と q は一定とする。
  - 上記でこの手順が終了しなかったとき，確率 $\dfrac{2}{3}$ で $X_{n+1} = 0$ となり，確率 $\dfrac{1}{3}$ で $X_{n+1} = 1$ となる。

この手順が $n = \ell$ で終了したとき，長さ ℓ の確率変数の列 $(X_1, \ldots, X_\ell)$ が生成され，それ以上の確率変数は生成されないことになる。次の問いに答えよ。

I. 整数 $k \geq 1$ について，次の行列

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{pmatrix} \Pr(X_{n+k} = 0 \mid X_n = 0) & \Pr(X_{n+k} = 1 \mid X_n = 0) \\ \Pr(X_{n+k} = 0 \mid X_n = 1) & \Pr(X_{n+k} = 1 \mid X_n = 1) \end{pmatrix} \tag{1}$$

を考える。ただし，$\Pr(A \mid B)$ は事象 B のもとでの事象 A の条件付き確率を表す。

1. $\boldsymbol{P}_1$ および $\boldsymbol{P}_2$ を p と q を用いて表せ。
2. $\boldsymbol{P}_3$ を $\boldsymbol{P}_1$ を用いて表せ。
3. $\boldsymbol{P}_k$ は，実数 γ_k を用いて $\boldsymbol{P}_k = \gamma_k \boldsymbol{P}_1$ と表せる。γ_k を求めよ。

II. 整数 $m \geq 2$ で，かつ $n = m$ より前に手順が終了していないとき，$X_m = 0$ となる確率および $X_m = 1$ となる確率をそれぞれ求めよ。

III. 生成される列の長さ ℓ の期待値と分散を求めよ。必要に応じて，絶対値が1より小さい実数 r について $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m r^{m-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m^2 r^{m-1} = \frac{1+r}{(1-r)^3}$ であることを使ってもよい。

IV. 整数 $k \geq 1$ について，確率 $\Pr(X_n = 0 \mid X_{n+k} = 1)$ を求めよ。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

草稿用白紙
BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

Problem 1

I. Find the general solutions $y(x)$ for the following differential equations:

1. $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^3, \tag{1}$$

2. $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6\big[y + \cos(3x)\big] = 0. \tag{2}$$

II. Consider the curve C given by the following polar equation in the polar coordinate system (r, θ) with the origin O on the xy-orthogonal coordinate plane as the pole, and the positive part of the x-axis as the starting line:

$$r = 2 + \cos\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi). \tag{3}$$

1. Calculate the area of the region enclosed by the curve C.
2. Consider the tangent line at the point $(r, \theta) = \left(\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ on the curve C. Find the slope of this tangent line in the xy-orthogonal coordinate system.

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

Problem 2

For a square matrix $\boldsymbol{A}$, $e^{\boldsymbol{A}}$ is defined as:

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k, \tag{1}$$

where $\boldsymbol{E}$ is the identity matrix and e is the base of natural logarithm.

I. Let $\boldsymbol{A}$ be a 3×3 square matrix which can be diagonalized by a regular matrix $\boldsymbol{P}$, i.e., $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$, where $\boldsymbol{D}$ is a diagonal matrix:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Here, λ_1, λ_2, and λ_3 are complex numbers.
Prove the following equation:

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}. \tag{3}$$

II. Let $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -5 & 8 & 10 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Find the regular matrix $\boldsymbol{P}$ and the diagonal matrix $\boldsymbol{D}$ such that $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$.
2. Calculate $e^{\boldsymbol{A}}$.

III. Consider $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ e \end{pmatrix}$, where x is a real number. In the following, the transpose of a vector $\boldsymbol{v}$ is denoted by $\boldsymbol{v}^T$.

1. Express the sum of the eigenvalues of $e^{\boldsymbol{A}}$ using e and x.
2. Let $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}e^{\boldsymbol{A}}$. Find the minimum and maximum values of $\dfrac{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}$ for a real three-dimensional vector $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$).
3. Let $f(\boldsymbol{z}) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{z}$ for a real three-dimensional vector $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ and $\boldsymbol{C}$ in III.2. Find $\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$ for $\boldsymbol{z}$ such that $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial z_1} = \dfrac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial z_2} = \dfrac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial z_3} = 0$.

草稿用白紙

BLANK PAGE

Problem 3

In the following, z is a complex number and i is the imaginary unit. Answer the following questions on the complex function

$$f(z) = \frac{\cot z}{z^2}. \tag{1}$$

Here, $\cot z = \dfrac{1}{\tan z}$. For a positive integer m, we define

$$D_m = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m} \big(z \cot z \big). \tag{2}$$

If necessary, you may use $D_2 = -\dfrac{2}{3}$ and

$$\lim_{z \to n\pi} \frac{z - n\pi}{\sin z} = (-1)^n \tag{3}$$

for an integer n.

I. Find all poles of $f(z)$. Also, find the order of each pole.

II. Find the residue of each pole found in I.

III. Let M be a positive integer and set $R = \pi(2M+1)$. As shown in Fig.1, for a parameter t that ranges in the interval $-\dfrac{R}{2} \le t \le \dfrac{R}{2}$, consider the following four line segments C_k $(k = 1, 2, 3, 4)$:

$$C_1 : z(t) = \frac{R}{2} + it, \tag{4}$$

$$C_2 : z(t) = -t + i\frac{R}{2}, \tag{5}$$

$$C_3 : z(t) = -\frac{R}{2} - it, \tag{6}$$

$$C_4 : z(t) = t - i\frac{R}{2}. \tag{7}$$

The initial point of each line segment corresponds to $t = -\dfrac{R}{2}$ and the terminal point corresponds to $t = \dfrac{R}{2}$. For each complex integral $I_k = \displaystyle\int_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$ along C_k $(k = 1, 2, 3, 4)$, find $\displaystyle\lim_{M \to \infty} I_k$.

IV. Let C be the closed loop composed of the four line segments C_1, C_2, C_3, and C_4 in III. By applying the residue theorem to the complex integral $I = \displaystyle\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ along the closed loop C, find the value of the following infinite series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{8}$$

V. $f(z)$ is now replaced with the complex function

$$g(z) = \frac{\cot z}{z^{2N}}, \tag{9}$$

where N is a positive integer. By following the steps in I–IV, express the following infinite series in terms of D_m:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2N}}. \tag{10}$$

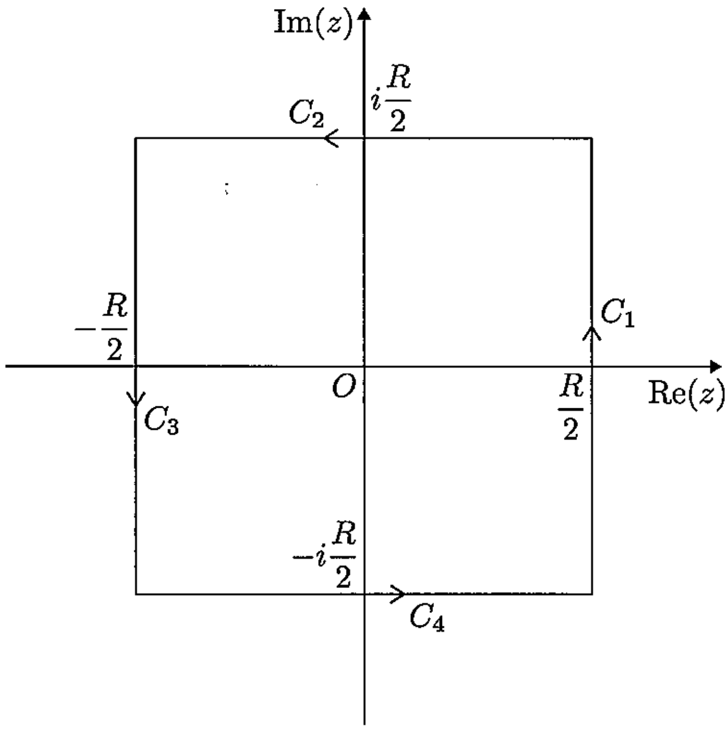

Fig.1

Problem 4

In the three-dimensional orthogonal coordinate system xyz, consider the surface S defined by the following equation:

$$\begin{pmatrix} x(\theta,\phi) \\ y(\theta,\phi) \\ z(\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi + 2 \\ 0 \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \tag{1}$$

where θ and ϕ are parameters of the surface S, and $0 \le \theta < 2\pi,\ \ 0 \le \phi < 2\pi$. Let V be the region surrounded by the surface S, and let W be the region satisfying the inequality $x^2 + y^2 \le 4$. Answer the following questions for the surface S.

I. Find the unit normal vector oriented inward the region V at the point $P \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ on the surface S.

II. Find the area of the surface S included in the region W.

III. Find the overlapping volume created by the two regions V and W.

IV. Consider the three-dimensional curve C on the surface S, which is defined by setting $\theta = \phi$. Find the curvature of the curve C at the point $Q \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ on the curve C.

Note that, in general, given a three-dimensional curve defined by $\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ represented by a parameter t, the curvature $\kappa(t)$ of the curve at the point $\boldsymbol{c}(t)$ on the curve is given by the following equation:

$$\kappa(t) = \frac{\left| \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}(t)}{\mathrm{d}t} \times \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{c}(t)}{\mathrm{d}t^2} \right|}{\left| \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}(t)}{\mathrm{d}t} \right|^3}. \tag{2}$$

草稿用白紙
BLANK PAGE

Problem 5

Consider a function $f(t)$ of a real number t, where $|f(t)|$ and $|f(t)|^2$ are integrable. Let $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ denote the Fourier transform of $f(t)$. It is defined as

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

where ω is a real number and i is the imaginary unit. Then, the following equation is satisfied:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Also, let $R_f(\tau)$ denote the autocorrelation function of $f(t)$. It is defined as

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)\mathrm{d}t, \tag{3}$$

where τ is a real number.

I. Consider a case where $f(t)$ is defined as follows:

$$f(t) = \begin{cases} \cos(at) & (|t| \leq \dfrac{\pi}{2a}), \\ 0 & (|t| > \dfrac{\pi}{2a}). \end{cases} \tag{4}$$

Here, a is a positive real constant. Find the followings:

1. $F(\omega)$,
2. $R_f(\tau)$,
3. $\mathcal{F}[R_f(\tau)]$.

II. Find the values of the following integrals:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 \dfrac{\pi x}{2}}{(x^2-1)^2} \mathrm{d}x,$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^4 \dfrac{\pi x}{2}}{(x^2-1)^4} \mathrm{d}x.$

Here, you may use the results of I.

草稿用白紙
BLANK PAGE

Problem 6

Consider the following procedure that generates a sequence of random variables that take the value 0 or 1. For an integer $n \geq 1$, we denote the n-th random variable of a sequence generated by the procedure as X_n.

- X_1 becomes $X_1 = 0$ with a probability $\frac{2}{3}$ and $X_1 = 1$ with a probability $\frac{1}{3}$.
- For an integer $n = 1, 2, \ldots$ in order, the following is repeated until the procedure terminates:
  - The procedure terminates with a probability p $(0 < p < 1)$ if $X_n = 0$ and with a probability q $(0 < q < 1)$ if $X_n = 1$. Here, p and q are constants.
  - If the procedure does not terminate as above, X_{n+1} becomes $X_{n+1} = 0$ with a probability $\frac{2}{3}$ and becomes $X_{n+1} = 1$ with a probability $\frac{1}{3}$.

When the procedure terminates at $n = \ell$, a sequence of length ℓ, composed of random variables $(X_1, \ldots, X_\ell)$, is generated, and no further random variables are generated. Answer the following questions.

I. For an integer $k \geq 1$, consider the following matrix:

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{pmatrix} \Pr(X_{n+k} = 0 \mid X_n = 0) & \Pr(X_{n+k} = 1 \mid X_n = 0) \\ \Pr(X_{n+k} = 0 \mid X_n = 1) & \Pr(X_{n+k} = 1 \mid X_n = 1) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Here, $\Pr(A \mid B)$ is the conditional probability of an event A given that an event B has occurred.

1. Express $\boldsymbol{P}_1$ and $\boldsymbol{P}_2$ using p and q.
2. Express $\boldsymbol{P}_3$ using $\boldsymbol{P}_1$.
3. $\boldsymbol{P}_k$ can be expressed as $\boldsymbol{P}_k = \gamma_k \boldsymbol{P}_1$ using a real number γ_k. Find γ_k.

II. For an integer $m \geq 2$, find the respective probabilities that $X_m = 0$ and $X_m = 1$, given that the procedure does not terminate before $n = m$.

III. Find the expected value and the variance of the length of the sequence, ℓ, generated by the procedure. If necessary, you may use $\sum_{m=1}^{\infty} m r^{m-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ and $\sum_{m=1}^{\infty} m^2 r^{m-1} = \frac{1+r}{(1-r)^3}$ for a real number r whose absolute value is smaller than 1.

IV. For an integer $k \geq 1$, find the probability $\Pr(X_n = 0 \mid X_{n+k} = 1)$.

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

草稿用白紙
BLANK PAGE

2025

The Graduate School Entrance Examination

Mathematics

13:00 – 15:30

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not open the problem booklet until the start of the examination is announced.
2. Notify your proctor if you find any printing or production errors.
3. Answers must be written in Japanese or English. The problems are described in Japanese on pages 2–12 and in English on pages 16–26.
4. Examinees for the Department of Civil Engineering must answer any one of the six problems in the problem booklet. Examinees for other departments must answer three problems among the six problems in the problem booklet.
5. One answer sheet is given to the examinees for the Department of Civil Engineering. Three answer sheets are given to the examinees for other departments. Use one answer sheet for each Problem (from 1 to 6). You may use the reverse side if necessary.
6. Write the problem number (1 to 6) that you answer in the upper left box of the answer sheet.
7. Fill in your examinee number in the designated place at the top of each answer sheet.
8. You may use the blank pages of the problem booklet for drafts without detaching them.
9. Any answer sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
10. Do not take the answer sheets or the booklet with you after the examination.

Examinee Number	No.

Write your examinee number in the space provided above.

日本語の注意事項はおもて表紙にある。