2024 年 度
大 学 院 入 学 試 験 問 題
数　　学

13：00 ～ 15：30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 日本語または英語で解答すること。日本語の問題文は 2–12 ページ，英語の問題文は 16–26 ページにある。
4. 6 問のうち，任意の 3 問を選んで解答すること。
5. 解答用紙は 3 枚渡される。問題（第 1 問から第 6 問）ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
6. 解答用紙左上の枠にその用紙で解答する問題番号（1 から 6）を記入すること。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に受験番号を記入すること。
8. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
9. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
10. 試験終了後，解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

Instructions in English are on the back cover.

草稿用白紙
BLANK PAGE

第 1 問

I. 以下の微分方程式の一般解 $y(x)$ を求めよ。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1-y) \tag{1}$$

ここで，$0 < y < 1$ とする。

II. 以下の定積分 I を計算せよ。

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\arccos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

ここで，$0 \leq \arccos\left(\frac{x}{2}\right) \leq \pi$ とする。

III. 正の実変数xに対する実数値関数$f(x)$および$g(x)$を

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} \tag{3}$$

$$g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \tag{4}$$

とおく。非負の整数nに対し，$I_n(x)$を以下のように定義する。

$$I_n(x) = \int_0^x \left\{\frac{g(X)}{f(X)}\right\}^n \mathrm{d}X \tag{5}$$

なお，

$$\exp(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m \tag{6}$$

を用いてもよい。

1. $f(x)^2 - g(x)^2$ を求めよ。
2. $I_{n+2}(x)$ を，$I_n(x)$ を用いて表せ。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

第 2 問

次の実対称行列 $\boldsymbol{A}$ について，以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

I. $\boldsymbol{A}$ の異なる全ての固有値$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ $(\lambda_1 < \cdots < \lambda_r)$を求めよ。

II. $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$に対するそれぞれの固有空間$W(\lambda_1), \cdots, W(\lambda_r)$を求めよ。

III. 正規直交基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を求めよ。ただし，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は問 II で求めた $W(\lambda_1), \cdots, W(\lambda_r)$ のいずれかに属するものとする。

IV. $\boldsymbol{A}$ のスペクトル分解

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{P}_i \tag{2}$$

を求めよ。
ここで，$\boldsymbol{P}_i$は$W(\lambda_i)$ への射影行列である。

V. $\boldsymbol{A}^n$を求めよ。ただしn は正の整数とする。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

第 3 問

次の問いに答えよ。ただし，z を複素数，$\bar{z}$ を z の複素共役，$\arg z$ を z の偏角，$|z|$ を z の絶対値，i を虚数単位とする。

I. 以下の式を満たすz の領域を複素平面上で図示せよ。

$$z\bar{z} + \sqrt{2}(z + \bar{z}) + 3i(z - \bar{z}) + 2 \leq 0 \tag{1}$$

II. 次の複素数値関数$f(z)$ について，以下の問いに答えよ。

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2 + 2i)z^2} \tag{2}$$

1. $f(z)$の全ての極と，それぞれの極の位数および留数を求めよ。
2. 留数定理を用いて，次の積分I_1を求めよ。ただし，積分路C は，$|z + 1| = 2$ を満たす複素平面上の円を反時計回りに一周するものとする。

$$I_1 = \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

III. 次の問いに答えよ。

1. $g(z)$を複素数値関数とし，$0 \leq \arg z \leq \pi$において，

$$\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0 \tag{4}$$

とする。複素上半平面における原点を中心とする半径Rの半円をC_R とする。このとき以下を示せ。

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{iaz} g(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{5}$$

ただし，aは正の実数である。

2. 次の積分I_2を求めよ。

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

草稿用白紙
BLANK PAGE

第 4 問

I. 2 次元直交xy座標系において，媒介変数 t $(0 \leq t \leq 2\pi)$を用いて次の式で表される曲線 L を考える。ただし，a は正の実数定数とする。

$$x(t) = a(t - \sin t) \tag{1}$$

$$y(t) = a(1 - \cos t) \tag{2}$$

1. t を $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で変化させたときの曲線Lの長さを求めよ。
2. 曲線 L 上の任意の点における曲率を求めよ。
   ただし，$t = 0$，$t = 2\pi$ は除く。

II. 3 次元直交xyz座標系において，媒介変数 u, v （u, v は実数)を用いて次の式で表される曲面を考える。

$$x(u, v) = \sinh u \cos v \tag{3}$$

$$y(u, v) = 2 \sinh u \sin v \tag{4}$$

$$z(u, v) = 3 \cosh u \tag{5}$$

1. この曲面を媒介変数を含まない式で表せ。
2. この曲面の $z = 5$ における xy 平面図の概形と，$y = 0$ における xz 平面図の概形を，それぞれ描け。その際，それぞれの軸との交点の値を示すこと。
3. この曲面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を u, v で表せ。
   ただし，$\boldsymbol{n}$ の z 成分の値は正であるとする。
4. $u = v = 0$ で与えられる点におけるガウス曲率を κ とする。
   κ の絶対値を求めよ。

草稿用白紙
BLANK PAGE

第5問

I. 実数 t を変数とする連続な関数$f(t)$を考える。$f(t)$は絶対積分可能であるとする。$f(t)$のフーリエ変換を$\mathcal{F}\{f(t)\}$と表し，以下の式で関数$F(\omega)$を定義する。

$$F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

ただし，ω は実数変数，iは虚数単位である。

1. 定数a ($a>0$) を用いて $g(t)=f(at)$ と定義し，

$$G(\omega)=\mathcal{F}\{g(t)\}=\mathcal{F}\{f(at)\} \tag{2}$$

とする。$G(\omega)$ を関数F を用いて表せ。

2. $f(t)=\exp(-t^2)$ かつ $a=2$ のとき，$F(\omega)$と(2)式で定義された$G(\omega)$の概形を ω の関数として違いが分かるように図示せよ。

3. 定数b ($b>0$) を用いて $h(t)=f(t)\exp(-ibt)$ と定義し，

$$H(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}=\mathcal{F}\{f(t)\exp(-ibt)\} \tag{3}$$

とする。$H(\omega)$ を関数F を用いて表せ。

4. $f(t)=\exp(-t^2)$ かつ $b=2$ のとき，$F(\omega)$と(3)式で定義された$H(\omega)$の概形を ω の関数として違いが分かるように図示せよ。

II. Nを正の整数とする。複素数列 $c_1, \cdots, c_N$ に対して離散フーリエ変換 $D_1, \cdots, D_N$ を

$$D_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} c_n \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} nm\right) \tag{4}$$

と定義する。ただし，m は $1 \leq m \leq N$ を満たす整数である。

1. 以下の式で定義される $S(n, n')$ を計算せよ。

$$S(n, n') = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \exp\left\{i \frac{2\pi}{N} (n - n')m\right\} \tag{5}$$

ただし，n は $1 \leq n \leq N$ を満たす整数であり，n' は $1 \leq n' \leq N$ を満たす整数である。

2. 複素数 U_{mn}を用いて，

$$D_m = \sum_{n=1}^{N} U_{mn} c_n \tag{6}$$

と書くとき，行列 $\mathbf{U} = [U_{mn}]_{1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N}$ はユニタリ行列となることを示せ。

3. $D_1, \cdots, D_N$ からc_nを求める離散逆フーリエ変換を表す式を導け。ただし，n は $1 \leq n \leq N$ を満たす整数である。

4. 複素数 z の複素共役を $\bar{z}$ と表し，Q を以下の式で定義する。

$$Q = \sum_{n=1}^{N} (\overline{c_n} c_{n+1} + \overline{c_{n+1}}\, c_n) \tag{7}$$

Q を D_m と $\overline{D_m}$ を用いて表せ。ここで，$c_{N+1} = c_1$の条件を課すものとする。

第 6 問

1 台の充電器が設置された電気自動車の充電ステーションがあり，ステーションに滞在している車両の台数を一定時間の間隔で観測することを考える。

このステーションに到着した車両は到着順に一列に並び，待ち行列の先頭の車両にのみ充電が行われる。ある観測から次の観測までの間に，1 台の車両が新たに到着する確率は $p\,(0 < p < 1)$ であり，先頭車両の充電が完了する確率は $q\,(0 < q < 1)$ であるとする。ここで，p と q は一定とし，$p + q < 1$ とする。

待ち行列には，先頭で充電中の車両を含めて $N\,(N \geq 2)$ 台の車両が待機可能で，$N + 1$ 台目の車両は行列に並ぶことをあきらめてその場を去るものとする。また，充電が完了した車両は直ちにステーションを去るものとする。

ここで，ある観測から次の観測までの間に，2 台以上の車両がステーションに到着することはなく，2 台以上の車両の充電が完了することもないとする。さらに，この間に，新たな車両の到着と先頭車両の充電完了の両方が起こることはないと仮定せよ。

I. $i\,(0 < i < N)$ 台の車両が行列に並んでいるとする。
ある観測から次の観測までの間に，新たに車両がステーションへ到着せず，かつ先頭車両がステーションから去らない確率を求めよ。

定常状態において，$i\,(0 \leq i \leq N)$ 台の車両が行列に並んでいる確率を π_i とする。

II. π_i と π_{i+1} の関係式を求めよ。ただし，$i \leq N - 1$ とする。

III. π_i を $p,\ q$ および N を用いて表せ。

IV. 定常状態において，ステーションに滞在している車両の台数の期待値を，$p,\ q$ および N を用いて表せ。ただし，$p < q$ とする。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

草稿用白紙
BLANK PAGE

Problem 1

I. Find the general solution $y(x)$ of the following differential equation:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1-y), \tag{1}$$

where $0 < y < 1$.

II. Find the value of the following definite integral, I :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\arccos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)}\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

where $0 \le \arccos\left(\frac{x}{2}\right) \le \pi$.

III. For any positive variable x, we define $f(x)$ and $g(x)$ respectively as

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} \tag{3}$$

and

$$g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x). \tag{4}$$

For any non-negative integer n, $I_n(x)$ is defined as

$$I_n(x) = \int_0^x \left\{\frac{g(X)}{f(X)}\right\}^n \mathrm{d}X. \tag{5}$$

Here, you may use

$$\exp(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m. \tag{6}$$

1. Calculate $f(x)^2 - g(x)^2$.
2. Express $I_{n+2}(x)$ using $I_n(x)$.

草稿用白紙
BLANK PAGE

Problem 2

Answer the following questions about a real symmetric matrix, $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

I. Find all the different eigenvalues of matrix $\boldsymbol{A}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ $(\lambda_1 < \cdots < \lambda_r)$.

II. Find all the eigenspaces $W(\lambda_1), \cdots, W(\lambda_r)$ corresponding to $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, respectively.

III. Find an orthonormal basis, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, which belongs to either of $W(\lambda_1), \cdots, W(\lambda_r)$, obtained in Question II.

IV. Find the spectral decomposition of $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{P}_i , \tag{2}$$

where $\boldsymbol{P}_i$ is the projection matrix onto $W(\lambda_i)$.

V. Find $\boldsymbol{A}^n$, where n is any positive integer.

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

Problem 3

Answer the following questions. Here, for any complex value z, $\bar{z}$ is the complex conjugate of z, $\arg z$ is the argument of z, $|z|$ is the absolute value of z, and i is the imaginary unit.

I. Sketch the region of z on the complex plane that satisfies the following:

$$z\bar{z} + \sqrt{2}(z + \bar{z}) + 3i(z - \bar{z}) + 2 \leq 0. \tag{1}$$

II. Answer the following questions on the complex valued function $f(z)$ below.

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2 + 2i)z^2} \tag{2}$$

1. Find all the poles of $f(z)$ as well as the orders and residues at the poles.
2. By applying the residue theorem, find the value of the following integral I_1. Here, the integration path C is the circle on the complex plane in the counterclockwise direction which satisfies $|z + 1| = 2$.

$$I_1 = \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

III. Answer the following questions.

1. Let $g(z)$ be a complex valued function, which satisfies

$$\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0 \tag{4}$$

for $0 \leq \arg z \leq \pi$.
Let C_R be the semicircle, with radius R, in the upper half of the complex plane with the center at the origin.
Show

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{iaz} g(z)\,\mathrm{d}z = 0, \tag{5}$$

where a is a positive real number.

2. Find the value of the following integral, I_2:

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

Problem 4

I. In the two-dimensional orthogonal xy coordinate system, consider the curve L represented by the following equations with the parameter t $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Here, a is a positive real constant.

$$x(t) = a(t - \sin t) \tag{1}$$

$$y(t) = a(1 - \cos t) \tag{2}$$

1. Obtain the length of the curve L when t varies in the range of $0 \leq t \leq 2\pi$.
2. Obtain the curvature at an arbitrary point of the curve L.
   Here, $t = 0$ and $t = 2\pi$ are excluded.

II. In the three-dimensional orthogonal xyz coordinate system, consider the curved surface represented by the following equations with the parameters u and v (u and v are real numbers).

$$x(u, v) = \sinh u \cos v \tag{3}$$

$$y(u, v) = 2 \sinh u \sin v \tag{4}$$

$$z(u, v) = 3 \cosh u \tag{5}$$

1. Express the curved surface by an equation without the parameters.
2. Sketch the xy-plane view at $z = 5$ and the xz-plane view at $y = 0$, respectively, of the curved surface. In the sketches, indicate the values at the intersection with each of the axes.
3. Express the unit normal vector $\boldsymbol{n}$ of the curved surface by u and v.
   Here, the z-component of $\boldsymbol{n}$ should be positive.
4. Let κ be the Gaussian curvature at the point $u = v = 0$.
   Calculate the absolute value of κ.

草稿用白紙
BLANK PAGE

Problem 5

I. We consider a continuous and absolutely integrable function $f(t)$ of a real variable t and denote the Fourier transform of the function $f(t)$ as $\mathcal{F}\{f(t)\}$. We define a function $F(\omega)$ by the following formula:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt\,, \tag{1}$$

where ω is a real variable and i is the imaginary unit.

1. We define $g(t) = f(at)$ for a constant a satisfying $a > 0$ and

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f(at)\}. \tag{2}$$

   Express $G(\omega)$ using the function F.

2. When $f(t) = \exp(-t^2)$ and $a = 2$, sketch the graph of the Fourier transformed functions $F(\omega)$ and $G(\omega)$ defined by Equation (2) as a function of ω to show the difference between them.

3. We define $h(t) = f(t)\exp(-ibt)$ for a constant b satisfying $b > 0$ and

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\exp(-ibt)\}. \tag{3}$$

   Express $H(\omega)$ using the function F.

4. When $f(t) = \exp(-t^2)$ and $b = 2$, sketch the graph of the Fourier transformed functions $F(\omega)$ and $H(\omega)$ defined by Equation (3) as a function of ω to show the difference between them.

II. Let N be a positive integer. We define a discrete Fourier transform $D_1, \cdots, D_N$ by the following formula:

$$D_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} c_n \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}nm\right), \tag{4}$$

for a complex sequence $c_1, \cdots, c_N$. Here, m is an integer satisfying $1 \leq m \leq N$.

1. Calculate $S(n, n')$:

$$S(n, n') = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \exp\left\{i\frac{2\pi}{N}(n - n')m\right\}. \tag{5}$$

   Here, n is an integer satisfying $1 \leq n \leq N$, and n' is an integer satisfying $1 \leq n' \leq N$.

2. Let U_{mn} be a complex number satisfying

$$D_m = \sum_{n=1}^{N} U_{mn} c_n. \tag{6}$$

   Show that the matrix $\mathbf{U} = [U_{mn}]_{1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N}$ is a unitary matrix.

3. Derive an equation for the inverse discrete Fourier transform c_n from $D_1, \cdots, D_N$.

   Here, n is an integer satisfying $1 \leq n \leq N$.

4. For any complex value z, $\bar{z}$ is the complex conjugate of z. We define Q by

$$Q = \sum_{n=1}^{N} (\overline{c_n} c_{n+1} + \overline{c_{n+1}}\, c_n). \tag{7}$$

   Express Q in terms of D_m and $\overline{D_m}$. Here, we impose the condition $c_{N+1} = c_1$.

Problem 6

Consider an electric vehicle charging station with a single charger installed and let us observe the number of vehicles at the station at regular time intervals.

Arriving vehicles at the station are lined up in the queue in the order of arrival, and only the first vehicle in the queue can be charged. In the interval between one observation and the next observation, assume that one new vehicle arrives with probability p $(0 < p < 1)$, and that the vehicle charging at the head of the queue completes charging with probability q $(0 < q < 1)$. Here, assume that p and q are constants and $p + q < 1$.

The queue can accommodate N $(N \geq 2)$ vehicles, including the vehicle being charged at the head of the queue, and the $(N + 1)$ -th vehicle shall give up and leave the station without queuing up. The vehicle which completes charging leaves the station immediately.

In the interval between one observation and the next observation, either only one or no vehicles arrive at the station and either only one or no vehicles complete charging. Moreover, assume that both arrival of new vehicle and completion of charging for the first vehicle do not occur together in any one interval.

I. When there are i $(0 < i < N)$ vehicles in the queue, find the probability for the following condition: no new vehicle arrives and the first vehicle does not leave in the interval between one observation and the next observation.

Let π_i $(0 \leq i \leq N)$ be the probability that i vehicles are in the queue in the steady state.

II. Express the relationship between π_i and π_{i+1}. Here, $i \leq N - 1$.

III. Express π_i using p, q and N.

IV. Find the expected value of the number of vehicles at the station in the steady state using p, q and N. Here, $p < q$.

草稿用白紙
BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

2024

The Graduate School Entrance Examination

Mathematics

13:00 – 15:30

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not open the problem booklet until the start of the examination is announced.
2. Notify your proctor if you find any printing or production errors.
3. Answers must be written in Japanese or English. The problems are described in Japanese on pages 2–12 and in English on pages 16–26.
4. Answer three problems out of the six problems in the problem booklet.
5. Three answer sheets are given. Use one answer sheet for each Problem (from 1 to 6). You may use the reverse side if necessary.
6. Write the problem number (1 to 6) that you answer in the upper left box of the answer sheet.
7. Fill in your examinee number in the designated place at the top of each answer sheet.
8. You may use the blank pages of the problem booklet for drafts without detaching them.
9. Any answer sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
10. Do not take the answer sheets or the booklet with you after the examination.

Examinee Number	No.

Write your examinee number in the space provided above.

日本語の注意事項はおもて表紙にある。