2022 年 度
大 学 院 入 学 試 験 問 題
数　学　3

主に「関数論・複素数」と
「確率・統計，情報数学，その他」
解答時間　40 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 日本語の問題文は 2-5 ページ，英語の問題文は 8-11 ページにある。
4. すべての問題に解答すること。
5. 解答用紙は 2 枚渡される。問（I および II）ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
6. 解答用紙左上の枠にその用紙で解答する問題番号（I または II）を記入すること。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に受験番号を記入すること。
8. 日本語または英語で解答すること。
9. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
10. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
11. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

Instructions in English are on the back cover.

草稿用白紙
BLANK PAGE

数学 3 （主に「関数論・複素数」と「確率・統計，情報数学，その他」）

問 I，II の両方に答えよ。

I. 問 I.1，I.2 では z を複素数，i を虚数単位とし，$|z|$ は z の絶対値を表す。

1. 次の積分を計算せよ。C は図 3.1 に示す複素平面上の閉経路とする。

$$I_1 = \oint_C \frac{z}{(z-i)(z-1)} \mathrm{d}z \tag{1}$$

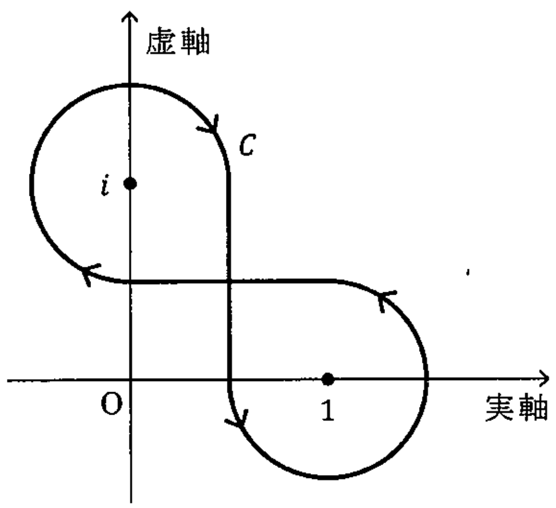

図 3.1

あとのページに続く。

2.　次の定積分 I_2 について考える。

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{10 + 8\cos\theta} \tag{2}$$

2.1. I_2 を複素関数積分

$$I_2 = \oint_{|z|=1} G(z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

の形に書き直したときの複素関数 $G(z)$ を求めよ。ただし，積分路は複素平面上の原点を中心とする単位円上を反時計回りに一周するものとする。導出過程も示すこと。

2.2. $G(z)$ の特異点をすべて求めよ。

2.3. 留数定理を用いて I_2 を求めよ。

あとのページに続く。

II.　製品が順次生産される状況を考える。そこで欠陥品が生じる事象は，独立同一分布に従って確率 ϕ $(0 \le \phi \le 1)$ で生じるものとする。欠陥品が生じる確率の分布が，生産結果を観測する前と後でどう変化するかを考える。以下，N (≥ 1) 個の製品の生産を観測したとする。

1.　i 番目の製品が欠陥品であれば $v_i = 1$，そうでなければ $v_i = 0$ とすると，0 と 1 の列 $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_N)$ が得られる。$\boldsymbol{v}$ 中の 1 の個数が $N_d(\boldsymbol{v})$ で表されるとき，$\boldsymbol{v}$ の生起確率を求めよ。

欠陥品が生じる確率は実数 a (> 1)，b (> 1) に対しベータ分布

$$\mathrm{Beta}_{\mathrm{a,b}}(x) = \frac{1}{\mathrm{B(a,b)}}\ x^{\mathrm{a}-1}(1-x)^{\mathrm{b}-1} \quad (0 \le x \le 1) \tag{4}$$

に従うとする。ただし，ベータ関数 B(a,b) は

$$\mathrm{B(a,b)} = \int_0^1 t^{\mathrm{a}-1}(1-t)^{\mathrm{b}-1}\mathrm{d}t \tag{5}$$

とする。ここで，欠陥品の生じる確率のベータ分布の a，b が生産結果の観測の前後でどう変化するかを，ベイズ推定により求めることを考える。ベイズ推定では，確率を決めるパラメータ θ（ここでは ϕ ）を確率変数として扱い，その分布 $\pi(\theta)$ を仮定する。生起確率 $P(A)$ で事象 A が観測された場合の θ の確率分布 $\pi(\theta|A)$ を式 (6) によって計算する。ここで，$\pi(\theta|A)$ は事後確率，$P(A|\theta)$ は θ の下で事象 A が観測される条件付き生起確率，$\pi(\theta)$ は事前確率である。

$$\pi(\theta|A) = \frac{\pi(\theta)P(A|\theta)}{P(A)} \tag{6}$$

あとのページに続く。

2.　欠陥品が生じる事象の確率 ϕ が事前確率 $\mathrm{Beta}_{\mathrm{a,b}}(\phi)$ に従うと仮定する。ϕ の下での $\boldsymbol{v}$ の条件付き生起確率を $Q(\boldsymbol{v}|\phi)$，$\boldsymbol{v}$ の生起確率を $Q_{\mathrm{a,b}}(\boldsymbol{v})$ で表す。このとき，$\boldsymbol{v}$ が生起した後の事後確率を求めよ。

3.　問 II.2 の$Q(\boldsymbol{v}|\phi)$ が問 II.1 で答えた生起確率になるとし，さらに $\mathrm{a} = 2$，$\mathrm{b} = 50$ として，$Q_{2,50}(\boldsymbol{v})$ を求めよ。

4.　問 II.3 において，事後確率がベータ分布 $\mathrm{Beta}_{\mathrm{a}',\mathrm{b}'}(\phi)$ になることを示し，a'，b' を求めよ。

5.　問 II.4 において，事後確率の最尤値を与える（事後確率を最大にする）ϕ を求めよ。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

草稿用白紙
BLANK PAGE

Mathematics 3 (Primarily from the fields of "Function Theory, Complex Number" and "Probability and Statistics, Information Mathematics, etc.")

Answer both Questions I and II.

I. In Questions I.1 and I.2, z denotes a complex number, i the imaginary unit, and $|z|$ the absolute value of z.

1. Calculate the following integral, where C is the closed path on the complex plane as shown in Figure 3.1.

$$I_1 = \oint_C \frac{z}{(z-i)(z-1)} \mathrm{d}z \tag{1}$$

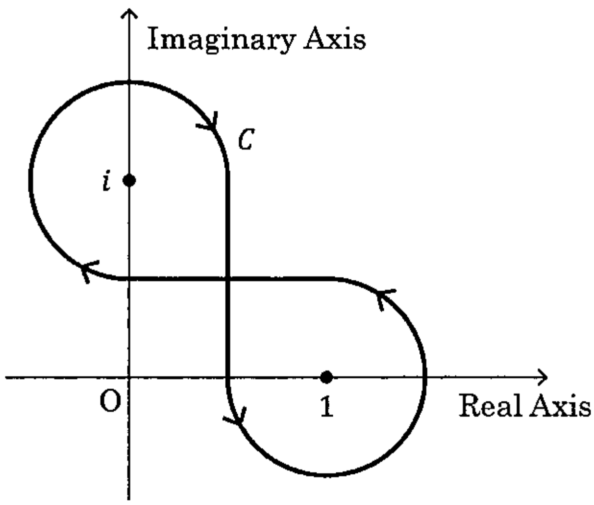

Figure 3.1

Continued on a later page.

2. Consider the definite integral I_2 expressed as

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{10 + 8\cos\theta} \quad . \tag{2}$$

2.1. Find a complex function $G(z)$ when I_2 is rewritten as an integral of a complex function as

$$I_2 = \oint_{|z|=1} G(z)\mathrm{d}z \quad . \tag{3}$$

Note that the integration path is a unit circle centered at the origin on the complex plane oriented counterclockwise. Show the derivation process with your answer.

2.2. Find all singularities of $G(z)$.

2.3. Using the residue theorem, obtain I_2.

Continued on a later page.

II. Consider a situation where products are produced sequentially. The events producing defective products are independent and identically distributed, and a defective product is produced with a probability of ϕ $(0 \leq \phi \leq 1)$. We consider the changes of the probability distributions before and after observing production results. In the following questions, N (≥ 1) denotes the number of products observed.

1. By defining $v_i = 1$ if the i-th product is a defective product, and $v_i = 0$ if it is not defective, we get a series $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_N)$, where the values can be 0 or 1. Let $N_d(\boldsymbol{v})$ be the number of observations with value of 1 in $\boldsymbol{v}$, obtain the occurrence probability of $\boldsymbol{v}$.

Suppose that the probability of producing a defective product follows the Beta distribution

$$\mathrm{Beta}_{\mathrm{a,b}}(x) = \frac{1}{\mathrm{B(a,b)}}\ x^{\mathrm{a}-1}(1-x)^{\mathrm{b}-1} \qquad (0 \leq x \leq 1), \tag{4}$$

for real numbers a (> 1) and b (> 1). Note that the Beta function $\mathrm{B(a,b)}$ is defined as

$$\mathrm{B(a,b)} = \int_0^1 t^{\mathrm{a}-1}(1-t)^{\mathrm{b}-1}\mathrm{d}t\ . \tag{5}$$

We now consider the changes of a and b before and after observing production results in the Beta distribution, which gives the probability of producing a defective product, using the Bayesian estimation. In the Bayesian estimation, the parameter θ (in this case, ϕ) that determines the probability is treated as the random variable and we assume that its distribution is described by $\pi(\theta)$. We calculate $\pi(\theta|A)$, that is the probability distribution of θ when an event A is observed with the occurrence probability $P(A)$, by Equation (6). Here, $\pi(\theta|A)$ is the posterior probability, $P(A|\theta)$ is the conditional occurrence probability that the event A is observed under θ, and $\pi(\theta)$ is the prior probability.

$$\pi(\theta|A) = \frac{\pi(\theta)P(A|\theta)}{P(A)} \tag{6}$$

Continued on a later page.

2. We assume that ϕ, the probability of producing a defective product, follows the prior probability $\mathrm{Beta}_{\mathrm{a,b}}(\phi)$. Let $Q(\boldsymbol{v}|\phi)$ be the conditional occurrence probability of $\boldsymbol{v}$ under ϕ and $Q_{\mathrm{a,b}}(\boldsymbol{v})$ be the occurrence probability of $\boldsymbol{v}$. Obtain the posterior probability after $\boldsymbol{v}$ occurs.

3. Suppose that $Q(\boldsymbol{v}|\phi)$ in Question II.2 is the occurrence probability obtained in Question II.1 and let $\mathrm{a} = 2$, $\mathrm{b} = 50$, obtain $Q_{2,50}(\boldsymbol{v})$.

4. In Question II.3, show that the posterior probability becomes the Beta distribution $\mathrm{Beta}_{\mathrm{a}',\mathrm{b}'}(\phi)$, and obtain a' and b'.

5. Obtain ϕ that gives the maximum likelihood estimate (that maximizes the posterior probability) in Question II.4.

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

2022

The Graduate School Entrance Examination

Mathematics 3

Primarily from the fields of

"Function Theory, Complex Number"

and "Probability and Statistics, Information Mathematics, etc."

Answer Time 40 minutes

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not open the problem booklet until the start of the examination is announced.
2. Notify your proctor if you find any printing or production errors.
3. The problems are described in Japanese on pages 2-5 and in English on pages 8-11.
4. Answer all questions.
5. 2 answer sheets are given. Use one answer sheet for each Question (I and II). You may use the reverse side if necessary.
6. Write the question number (I or II) that you answer on the answer sheet in the upper left box.
7. Fill in your examinee number in the designated place at the top of each answer sheet.
8. Answers must be written in Japanese or English.
9. You may use the blank pages of the problem booklet for drafts without detaching them.
10. Any answer sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
11. You may not take the booklet or answer sheets with you after the examination.

Examinee Number	No.

Write your examinee number in the space provided above.

日本語の注意事項はおもて表紙にある。