2022 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　学　2

主に「ベクトル・行列・固有値（線形代数）」と「曲線・曲面」

解答時間　40 分

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 日本語の問題文は 2-4 ページ，英語の問題文は 8-10 ページにある。
4. すべての問題に解答すること。
5. 解答用紙は 2 枚渡される。問（I および II）ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
6. 解答用紙左上の枠にその用紙で解答する問題番号（I または II）を記入すること。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に受験番号を記入すること。
8. 日本語または英語で解答すること。
9. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
10. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
11. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

Instructions in English are on the back cover.

草稿用白紙
BLANK PAGE

数学 2 （主に「ベクトル・行列・固有値（線形代数）」と「曲線・曲面」）

問 I, II の両方に答えよ。

I. 実対称行列 $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ を以下のように定める。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

1. $\boldsymbol{AB}$ を求めよ。

式(1)と(2)で定める行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ を満たしている。

2. 一般に，積に関して可換な 2 つの実対称行列は同時対角化が可能である。このことを，すべての固有値が互いに異なる場合に関して証明せよ。

3. ノルム 1 の 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{v}$ が，式(1)の $\boldsymbol{A}$ に対して固有値 a の固有ベクトルであり，式(2)の $\boldsymbol{B}$ に対して固有値 b の固有ベクトルでもあるとする。つまり，$\boldsymbol{Av} = a\boldsymbol{v}$ ，$\boldsymbol{Bv} = b\boldsymbol{v}$ ，$\|\boldsymbol{v}\| = 1$ であるとする。$(\boldsymbol{v}, a, b)$ の組み合わせをすべて求めよ。

あとのページに続く。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

II. 直交座標系 xyz において，式(3)で与えられる曲面に関する，以下の問いに答えよ。ただし， $\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{m}$ の転置を表す。

$$f(x,y,z) = 2(x^2+y^2+z^2) + 4yz + \frac{z-y}{\sqrt{2}} = 0 \tag{3}$$

1. $f(x,y,z)$ を以下の形で書き表した際の 3 次実対称行列 $\boldsymbol{A}$ ，ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ を求めよ。

$$f(x,y,z) = (x \quad y \quad z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4}$$

2. 問 II.1 で求めた $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$ と対角化する 3 次直交行列 $\boldsymbol{P}$ と式(5)に示す対角行列 $\boldsymbol{D}$ を考える。

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$d_1 \geq d_2 \geq d_3$ となるような $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{D}$ を 1 組求めよ。

3. 問 II.2 で求めた $\boldsymbol{P}$ を用いた座標変換 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で得られた X, Y, Z を使って f を表せ。

4. 式(3)に示す曲面と平面 $y - z - \sqrt{2} = 0$ で囲まれる領域を考える。その領域の体積を求めよ。

草稿用白紙
BLANK PAGE

草稿用白紙

BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

Mathematics 2 (Primarily from the fields of "Vector, Matrix, Eigenvalue (Linear Algebra)" and "Curve and Surface")

Answer both Questions I and II.

I. Real symmetric matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ are defined as follows:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1. Obtain $\boldsymbol{AB}$.

Matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ defined as Equations (1) and (2) satisfy $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

2. In general, two real symmetric matrices that are commutative for multiplication are simultaneously diagonalizable. Prove this for the case where all the eigenvalues are mutually different.

3. Suppose a three-dimensional real vector $\boldsymbol{v}$ whose norm is 1 is an eigenvector of $\boldsymbol{A}$ in Equation (1) corresponding to an eigenvalue a as well as an eigenvector of $\boldsymbol{B}$ in Equation (2) corresponding to an eigenvalue b . That is, $\boldsymbol{Av} = a\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{Bv} = b\boldsymbol{v}$, and $\|\boldsymbol{v}\| = 1$. Obtain all the sets of $(\boldsymbol{v}, a, b)$.

Continued on a later page.

草稿用白紙

BLANK PAGE

II. Answer the following questions concerning the curved surface given by Equation (3) in the Cartesian coordinate system xyz . Note that $\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}$ indicates transpose of $\boldsymbol{m}$.

$$f(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 4yz + \frac{z - y}{\sqrt{2}} = 0 \qquad (3)$$

1. When the function $f(x, y, z)$ is expressed in the following form, derive the real symmetric matrix $\boldsymbol{A}$ of order 3 and the vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$:

$$f(x, y, z) = (x \quad y \quad z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \qquad (4)$$

2. Suppose that the matrix $\boldsymbol{A}$ derived in Question II.1 is diagonalized as $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$ using an orthogonal matrix $\boldsymbol{P}$ of order 3 and a diagonal matrix $\boldsymbol{D}$, which is given by Equation (5):

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} . \qquad (5)$$

Obtain a set of $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{D}$ satisfying $d_1 \geq d_2 \geq d_3$.

3. Express the function f using X, Y, and Z, obtained by applying the coordinate transformation defined by $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, using $\boldsymbol{P}$ derived in Question II.2.

4. Consider a region surrounded by the curved surface given by Equation (3) and a plane defined by $y - z - \sqrt{2} = 0$. Obtain the volume of this region.

草稿用白紙

BLANK PAGE

草稿用白紙
BLANK PAGE

2022

The Graduate School Entrance Examination

Mathematics 2

Primarily from the fields of

"Vector, Matrix, Eigenvalue (Linear Algebra)"

and "Curve and Surface"

Answer Time 40 minutes

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not open the problem booklet until the start of the examination is announced.
2. Notify your proctor if you find any printing or production errors.
3. The problems are described in Japanese on pages 2-4 and in English on pages 8-10.
4. Answer all questions.
5. 2 answer sheets are given. Use one answer sheet for each Question (I and II). You may use the reverse side if necessary.
6. Write the question number (I or II) that you answer on the answer sheet in the upper left box.
7. Fill in your examinee number in the designated place at the top of each answer sheet.
8. Answers must be written in Japanese or English.
9. You may use the blank pages of the problem booklet for drafts without detaching them.
10. Any answer sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
11. You may not take the booklet or answer sheets with you after the examination.

Examinee Number	No.

Write your examinee number in the space provided above.

日本語の注意事項はおもて表紙にある。