2022 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　学　1

主に「微分積分および微分方程式」と

「級数・フーリエ解析および積分変換」

解答時間　40 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 日本語の問題文は 2-4 ページ，英語の問題文は 8-10 ページにある。
4. すべての問題に解答すること。
5. 解答用紙は 2 枚渡される。問（I および II）ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
6. 解答用紙左上の枠にその用紙で解答する問題番号（I または II）を記入すること。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に受験番号を記入すること。
8. 日本語または英語で解答すること。
9. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
10. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
11. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

Instructions in English are on the back cover.

草稿用白紙

BLANK PAGE

数学 1 （主に「微分積分および微分方程式」と「級数・フーリエ解析および積分変換」）

問 I，II の両方に答えよ。

I. xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。ただし，a，b は定数であり，$a>b>0$ を満たす。以下の問いに答えよ。

1. 楕円上の第 1 象限の点 (X,Y) における接線の方程式を求めよ。
2. 問 I.1 で求めた接線は x 軸および y 軸と交わる。この 2 つの交点を結ぶ線分の長さを最小にする接点の座標 (X,Y) と，そのときの線分の長さを求めよ。
3. 問 I.2 で求めた線分，x 軸および y 軸で囲まれた領域を考え，この領域を x 軸のまわりに回転させて作られる円錐を C_1 とする。次に，円錐 C_1 と等しい表面積（底面積を含む）をもちながら，その体積が最大となる円錐を C_2 とする。円錐 C_1 の底面積を S_1 とし，円錐 C_2 の底面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

あとのページに続く。

草稿用白紙
BLANK PAGE

II. 実変数 t に対して，実数値関数 $f(t)$ を区間 $0 \leq t < \infty$ で定義する。このとき，s を実部が正の複素変数として，ラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

を定義する。右辺の広義積分は発散しないという条件の下に，以下の問いに答えよ。

1. 以下の条件

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} e^{-st} f'(t) = 0 \tag{2}$$

が満たされるとき，

$$\mathcal{L}[f''(t)] = -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}[f(t)] \tag{3}$$

が成り立つことを示せ。ただし，$f'(t)$ と $f''(t)$ は，

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}, \quad f''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{4}$$

である。

2. 区間 $0 \leq t < \infty$ で定義された関数 $g(t) = e^{-at}\cos(\omega t)$ と $h(t) = e^{-at}\sin(\omega t)$ のラプラス変換を，式(1)を用いて導出過程も示しながら求めよ。ただし，a と ω は正の実数とする。

3. 微分方程式

$$f''(t) + 6f'(t) + 13f(t) = 0 \tag{5}$$

の解を，初期値 $f(0) = 5$，$f'(0) = -11$ の条件の下で求めよ。

草稿用白紙
BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

Mathematics 1 (Primarily from the fields of "Differential and Integral Calculus, Differential Equations" and "Series, Fourier Analysis, Integral Transform")

Answer both Questions I and II.

I. Consider an ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ in the xy-plane. Here, a and b are constants satisfying $a > b > 0$. Answer the following questions.

1. Find the equation of the tangent line at a point (X, Y) on the ellipse in the first quadrant.

2. The tangent line obtained in Question I.1 intersects the x- and y-axes. Find the coordinates (X, Y) at the tangent point that minimizes length of the segment connecting the two intersects and obtain the minimum length of the segment.

3. Consider a region bounded by the segment obtained in Question I.2 and the x- and y-axes, and let C_1 be a cone formed by rotating the region around the x-axis. Next, let C_2 be a cone with the maximum volume while having the same surface area (including a base area) as the cone C_1 . Find $\dfrac{S_2}{S_1}$, where S_1 and S_2 are the base areas of the cones C_1 and C_2 , respectively.

Continued on a later page.

草稿用白紙

BLANK PAGE

II. Consider a real-valued function $f(t)$ for a real variable t defined for $0 \leq t < \infty$. The Laplace transform is defined as

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \mathrm{d}t \ , \tag{1}$$

where s is a complex variable whose real part is positive. Under the condition that the improper integral in the right-hand side does not diverge, answer the following questions.

1. When the conditions

$$\lim_{t \to \infty} e^{-st} f(t) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t \to \infty} e^{-st} f'(t) = 0 \tag{2}$$

are satisfied, show the following equation holds:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = -f'(0) - sf(0) + s^2 \mathcal{L}[f(t)] \ . \tag{3}$$

Note that $f'(t)$ and $f''(t)$ are defined as

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{and} \quad f''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} \ . \tag{4}$$

2. Calculate the Laplace transform of $g(t) = e^{-at} \cos(\omega t)$ and $h(t) = e^{-at} \sin(\omega t)$ defined for $0 \leq t < \infty$ by showing derivation processes using Equation (1). Note that a and ω are positive real numbers.

3. Solve the differential equation

$$f''(t) + 6f'(t) + 13f(t) = 0 \ , \tag{5}$$

where the initial values are $f(0) = 5$ and $f'(0) = -11$.

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

2022

The Graduate School Entrance Examination

Mathematics 1

Primarily from the fields of

"Differential and Integral Calculus, Differential Equations"

and "Series, Fourier Analysis, Integral Transform"

Answer Time 40 minutes

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not open the problem booklet until the start of the examination is announced.
2. Notify your proctor if you find any printing or production errors.
3. The problems are described in Japanese on pages 2-4 and in English on pages 8-10.
4. Answer all questions.
5. 2 answer sheets are given. Use one answer sheet for each Question (I and II). You may use the reverse side if necessary.
6. Write the question number (I or II) that you answer on the answer sheet in the upper left box.
7. Fill in your examinee number in the designated place at the top of each answer sheet.
8. Answers must be written in Japanese or English.
9. You may use the blank pages of the problem booklet for drafts without detaching them.
10. Any answer sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
11. You may not take the booklet or answer sheets with you after the examination.

Examinee Number	No.

Write your examinee number in the space provided above.

日本語の注意事項はおもて表紙にある。