2026 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　学

13：00 ～ 15：30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 日本語または英語で解答すること。日本語の問題文は 2–12 ページ，英語の問題文は 16–26 ページにある。
4. 6 問のうち，社会基盤学専攻の受験生は任意の 1 問を，それ以外の受験生は任意の 3 問を選んで解答すること。
5. 解答用紙は，社会基盤学専攻の受験生には 1 枚，それ以外の受験生には 3 枚渡される。問題（第 1 問から第 6 問）ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
6. 解答用紙左上の枠にその用紙で解答する問題番号（1 から 6）を記入すること。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に受験番号を記入すること。
8. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
9. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
10. 試験終了後，解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

Instructions in English are on the back cover.

草稿用白紙
BLANK PAGE

第 1 問

I. 次の微分方程式の一般解 $y(x)$ を求めよ。

1. $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 8y - 3e^{-x} = 0 \tag{1}$$

2. $$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2y - 4x^3 = 0 \tag{2}$$

II. 次の微分方程式を考える。

$$x(2x^3 - 1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2x^2 + y - 2xy^2 = 0 \tag{3}$$

1. 式 (3) の特解が式 (4) で与えられるとき, 係数 A_0, A_1, A_2 を求めよ。

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 \tag{4}$$

2. II.1 で求めた特解を用い, 式 (3) の一般解 $y(x)$ を求めよ。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

第2問

以下では，固有値および固有ベクトルはそれぞれ複素数および複素ベクトルで考えるものとする。

I. 次の行列 $\boldsymbol{A}$ を考える。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \tag{1}$$

ここで，n は 3 以上の整数である。以下の問いに答えよ。

1. 行列 $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値と，それぞれに対応する単位固有ベクトルを求めよ。
2. 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ。

II. 次の行列 $\boldsymbol{B}$ を考える。

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

以下の問いに答えよ。

1. 行列 $\boldsymbol{B}$ のすべての固有値を求めよ。
2. $\boldsymbol{B}^2$, $\boldsymbol{B}^3$, $\boldsymbol{B}^4$, $\boldsymbol{B}^5$ を求めよ。
3. $\boldsymbol{B}^2$ と $\boldsymbol{B}^5$ の固有値をすべて求めよ。

III. 次の行列 $\boldsymbol{C}$ を考える。

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$\boldsymbol{C}^m = \boldsymbol{E}$ となる最小の正の整数 m を求めよ。ただし, $\boldsymbol{E}$ は単位行列である。

草稿用白紙
BLANK PAGE

第3問

以下では，z と w を複素数，i を虚数単位とする。また，z は x と y を実数として，$z = x + iy$ と書けるとする。

I. $\cos z = 10$ を満たす全ての z を考える。x と y を求めよ。

II. 式 (1) の複素数 w を考える。

$$w = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i} \tag{1}$$

z が $y > 2$ の範囲を動くとき，w の値が動く範囲を複素平面上で図示せよ。

III. 式 (2) の複素関数 $f(z)$ を考える。

$$f(z) = z^3 e^{-1/z^2} \tag{2}$$

1. $f(z)$ を $z = 0$ でローラン展開せよ。
2. $f(z)$ の $z = 0$ での留数を求めよ。
3. 式 (3) の複素積分 I を求めよ。

$$I = \oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

IV. 正則関数 $g(z)$ の実部と虚部をそれぞれ u，v とし，実部 u は

$$u = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x \tag{4}$$

で与えられるとする。

1. v を x と y の関数として求めよ。
2. $g(z)$ を z を用いて表せ。

草稿用白紙
BLANK PAGE

第 4 問

3 次元 xyz 直交座標系における曲線と曲面に関して以下の問いに答えよ。ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。

I. xz 平面上にあり，式 (1) で与えられる曲線 L の長さを求めよ。

$$\boldsymbol{L}(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}\,\boldsymbol{i} + u\,\boldsymbol{k} \tag{1}$$

ここで，u は媒介変数であり，$-2 \leq u \leq 2$ である。

II. I の曲線 L を z 軸の周りに回転することで得られる曲面 S を考える。曲面 S は式 (2) で与えられる。

$$\boldsymbol{S}(u, v) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}\cos v\,\boldsymbol{i} + \frac{e^u + e^{-u}}{2}\sin v\,\boldsymbol{j} + u\,\boldsymbol{k} \tag{2}$$

ここで，u, v は独立した媒介変数であり，$-2 \leq u \leq 2$，$0 \leq v \leq 2\pi$ である。曲面 S の面積を求めよ。

III. II の曲面 S 上にある点 $P\left(\dfrac{e + e^{-1}}{2\sqrt{2}},\ \dfrac{e + e^{-1}}{2\sqrt{2}},\ 1\right)$ における接平面を求め，x, y, z の方程式として表せ。

IV. III の点 P における II の曲面 S のガウス曲率を求めよ。

なお，独立した媒介変数 ξ, η を用いて式 (3) で与えられ，式 (4) を満たす，十分に滑らかな曲面 R を考える。

$$\boldsymbol{R}(\xi, \eta) = x(\xi, \eta)\,\boldsymbol{i} + y(\xi, \eta)\,\boldsymbol{j} + z(\xi, \eta)\,\boldsymbol{k} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta} \neq \boldsymbol{0} \tag{4}$$

曲面 R 上の点 $Q\big(x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta),\ z(\xi, \eta)\big)$ における曲面 R のガウス曲率 K は式 (5) により計算できる。

$$K = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2} \cdot \boldsymbol{n}\right)\left(\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \eta^2} \cdot \boldsymbol{n}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \boldsymbol{n}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}\right)\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta}\right) - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta}\right)^2} \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は点 Q における曲面 R の単位法線ベクトルである。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

第 5 問

以下では，i は虚数単位とし，k および x は実数とする。

I. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換は式 (1) のように定義される。

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{1}$$

以下の関数 $f(x)$ のフーリエ変換を実数 k を用いて表せ。ただし a および b は正の実数，y は実数とする。

1. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| \leq a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \tag{2}$$

2. $$f(x) = e^{-a|x|} \cos bx \tag{3}$$

3. $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 - |x-y|} \mathrm{d}y \tag{4}$$

   必要であれば，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。

II. 周期 2π をもつ関数 $g(x)$ のフーリエ級数展開を

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5}$$

のように表すとき，フーリエ係数 a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ は

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\mathrm{d}x \tag{7}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\mathrm{d}x \tag{8}$$

によって求められる。

区間 $-\pi \leq x < \pi$ において式 (9), (10) のように定義され，$g(x + 2\pi) = g(x)$ によって周期 2π をもつように拡張した関数 $g(x)$ について考える。

1. 式 (9) の $g(x)$ について，a_0, a_n, b_n を求めよ。

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases} \tag{9}$$

2. 式 (10) の $g(x)$ について，a_0, a_n, b_n を求めよ。

$$g(x) = \cos\frac{x}{2} \quad (-\pi \leq x < \pi) \tag{10}$$

3. 式 (11) の無限級数の収束値を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \tag{11}$$

第6問

中の見えない壺Aの中に，赤色の玉が R 個と緑色の玉が G 個の計 $R+G$ 個の玉が入っている。壺Aから n 個の玉を同時に取り出す。取り出された玉のうち，赤色の玉の個数を確率変数 X で表す。ただし，整数 n, R, G について，$n \geq 1$，$R \geq n$，および $G \geq n$ とする。以下の問いに答えよ。

I. $n=2$，$R=3$，$G=6$ のとき，確率変数 X の期待値と分散を求めよ。

II. $0 \leq k \leq n$ である整数 k について，$X=k$ となる確率を $\Pr(X=k)$ と表す。$\Pr(X=k)$ を R, G, n, k を用いて表せ。

III. 確率変数 X に関するエントロピー $H(X)$ は

$$H(X) = -\sum_{x=0}^{n} \Pr(X=x) \log \Pr(X=x) \tag{1}$$

と定義される。$n=2$，$R+G=7$ のとき，$H(X)$ が最大となる R をすべて求め，そのときの $H(X)$ の値を答えよ。

IV. 中の見えない空の壺Bと壺Cを考える。壺Aから取り出した n 個の玉と，壺Aに残った $R+G-n$ 個の玉について，次の操作を行う。

- 壺Aから取り出した n 個の玉のうち，赤色の玉をすべて白く塗って壺Bに入れ，緑色の玉をすべて白く塗って壺Cに入れる。
- 壺Aに残った $R+G-n$ 個の玉のうち，赤色の玉をすべて壺Bに移し，緑色の玉をすべて壺Cに移す。

つまり，この操作の後には，壺Aには玉は入っておらず，壺Bには白色の玉が X 個と赤色の玉が $R-X$ 個入っていて，壺Cには白色の玉が $n-X$ 個と緑色の玉が $G-(n-X)$ 個入っていることになる。

このうえで，壺Bから玉を X 個取り出し，壺Cから玉を $n-X$ 個取り出す。このとき，壺Bと壺Cから取り出した玉がすべて白色の場合に $Y=1$，それ以外の場合に $Y=0$ となる確率変数 Y を考える。

$0 \leq k \leq n$ である整数 k について，$Y=i$ という条件のもとで $X=k$ となる条件付き確率を $\Pr(X=k \mid Y=i)$ と表す。ただし，$i=0$ または $i=1$ である。

1. 条件付き確率 $\Pr(X=k \mid Y=1)$ を n を用いて表せ。
2. 条件付き確率 $\Pr(X=k \mid Y=0)$ を R, G, n, k を用いて表せ。

草稿用白紙
BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

草稿用白紙
BLANK PAGE

Problem 1

I. Find the general solution $y(x)$ for the following differential equations:

1. $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 8y - 3e^{-x} = 0, \tag{1}$$

2. $$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2y - 4x^3 = 0. \tag{2}$$

II. Consider the following differential equation:

$$x(2x^3 - 1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2x^2 + y - 2xy^2 = 0. \tag{3}$$

1. When a particular solution of Equation (3) is given by Equation (4), find the coefficients A_0, A_1, and A_2.
$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 \tag{4}$$

2. Using the particular solution obtained in II.1, find the general solution $y(x)$ of Equation (3).

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

Problem 2

In the following, eigenvalues and eigenvectors are considered to be complex numbers and complex vectors, respectively.

I. Consider the following matrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Here, n is an integer greater than or equal to 3. Answer the following questions.

1. Find all eigenvalues of the matrix $\boldsymbol{A}$ and their corresponding unit eigenvectors.
2. Find the inverse matrix of the matrix $\boldsymbol{A}$.

II. Consider the following matrix $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Answer the following questions.

1. Find all eigenvalues of the matrix $\boldsymbol{B}$.
2. Find $\boldsymbol{B}^2$, $\boldsymbol{B}^3$, $\boldsymbol{B}^4$, and $\boldsymbol{B}^5$.
3. Find all eigenvalues of $\boldsymbol{B}^2$ and $\boldsymbol{B}^5$.

III. Consider the following matrix $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Find the smallest positive integer m, such that $\boldsymbol{C}^m = \boldsymbol{E}$. Here, $\boldsymbol{E}$ is the identity matrix.

草稿用白紙
BLANK PAGE

Problem 3

In the following, z and w are complex numbers and i is the imaginary unit. Let x and y be real numbers, and z is written in the form of $z = x + iy$.

I. Consider all of z satisfying $\cos z = 10$. Find x and y.

II. Consider the complex number w in Equation (1).

$$w = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i} \tag{1}$$

When z is moving in the region $y > 2$, draw the region that the value of w spans in the complex plane.

III. Consider the complex function $f(z)$ in Equation (2).

$$f(z) = z^3 e^{-1/z^2} \tag{2}$$

1. Find the Laurent expansion of $f(z)$ at $z = 0$.
2. Find the residue of $f(z)$ at $z = 0$.
3. Find the complex integral I in Equation (3).

$$I = \oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

IV. Let u and v be the real and imaginary parts of a regular analytic function $g(z)$, respectively, and the real part u is given by

$$u = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x. \tag{4}$$

1. Find v as a function of x and y.
2. Express $g(z)$ using z.

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

Problem 4

Answer the following questions on a curve and a surface in the three-dimensional orthogonal coordinate system xyz. Here, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, and $\boldsymbol{k}$ are the unit vectors in the directions of the x, y, and z axes, respectively.

I. Find the length of a curve L on the xz plane, given by Equation (1).

$$\boldsymbol{L}(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}\,\boldsymbol{i} + u\,\boldsymbol{k} \tag{1}$$

Here, u is a parameter, and $-2 \leq u \leq 2$.

II. Consider a surface S obtained by rotating the curve L in I around the z axis. The surface S is given by Equation (2).

$$\boldsymbol{S}(u, v) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}\cos v\,\boldsymbol{i} + \frac{e^u + e^{-u}}{2}\sin v\,\boldsymbol{j} + u\,\boldsymbol{k} \tag{2}$$

Here, u and v are independent parameters, and $-2 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Find the area of the surface S.

III. Find the tangent plane at the point $P\left(\dfrac{e + e^{-1}}{2\sqrt{2}},\ \dfrac{e + e^{-1}}{2\sqrt{2}},\ 1\right)$ on the surface S in II, and express an equation using x, y, and z.

IV. Find the Gaussian curvature of the surface S in II at the point P in III.

Here, consider a sufficiently smooth surface R given by Equation (3) using independent parameters ξ, η, and satisfying Equation (4),

$$\boldsymbol{R}(\xi, \eta) = x(\xi, \eta)\,\boldsymbol{i} + y(\xi, \eta)\,\boldsymbol{j} + z(\xi, \eta)\,\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta} \neq \boldsymbol{0}. \tag{4}$$

The Gaussian curvature K of the surface R at a point $Q\big(x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta),\ z(\xi, \eta)\big)$ on the surface R can be calculated by Equation (5).

$$K = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2} \cdot \boldsymbol{n}\right)\left(\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \eta^2} \cdot \boldsymbol{n}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \boldsymbol{n}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}\right)\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta}\right) - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta}\right)^2} \tag{5}$$

Here, $\boldsymbol{n}$ is a unit normal vector of the surface R at the point Q.

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

Problem 5

In the following, i is the imaginary unit, and k and x are real numbers.

I. The Fourier transform of a function $f(x)$ is defined as Equation (1).

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{1}$$

Express the Fourier transform of the following functions $f(x)$ using a real number k. Here, a and b are positive real numbers, and y is a real number.

1. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| \le a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \tag{2}$$

2. $$f(x) = e^{-a|x|} \cos bx \tag{3}$$

3. $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 - |x-y|} \mathrm{d}y \tag{4}$$

   If necessary, you may use $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \sqrt{\pi}$.

II. When the Fourier series expansion of the function $g(x)$, with a period of 2π, is expressed as

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{5}$$

the Fourier coefficients a_0, a_n, and b_n $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ can be found by

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x, \tag{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\mathrm{d}x, \tag{7}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Let us consider functions $g(x)$, which are defined as Equations (9) and (10) in the region $-\pi \le x < \pi$, and expanded to have a period of 2π by $g(x + 2\pi) = g(x)$.

1. Find a_0, a_n, and b_n for the $g(x)$ in Equation (9).

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \le x < 0) \\ 1 & (0 \le x < \pi) \end{cases} \tag{9}$$

2. Find a_0, a_n, and b_n for the $g(x)$ in Equation (10).

$$g(x) = \cos\frac{x}{2} \quad (-\pi \le x < \pi) \tag{10}$$

3. Find the convergence value of the infinite series in Equation (11).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \tag{11}$$

Problem 6

In a jar A, in which we cannot see the contents, R red balls and G green balls, a total of $R+G$ balls are placed. From the jar A, n balls are picked up at once. Among the balls picked up, the number of the red balls is represented by a random variable X. Here, integers n, R, and G are such that $n \geq 1$, $R \geq n$, and $G \geq n$, respectively. Answer the following questions.

I. When $n=2$, $R=3$, and $G=6$, find the expected value and the variance of the random variable, X.

II. For an integer k such that $0 \leq k \leq n$, let $\Pr(X=k)$ denote the probability of $X=k$. Express $\Pr(X=k)$ using R, G, n, and k.

III. The entropy, $H(X)$, of the random variable, X, is defined as:

$$H(X) = -\sum_{x=0}^{n} \Pr(X=x) \log \Pr(X=x). \tag{1}$$

When $n=2$ and $R+G=7$, find all R that maximize $H(X)$, and give the corresponding value of $H(X)$.

IV. Let us consider empty jars B and C, in which we cannot see the contents. The following operations are carried out for the n balls picked up from the jar A and the $R+G-n$ balls remained in the jar A.

- Among the n balls picked up from the jar A, all the red balls are painted white and then placed in the jar B, and all the green balls are painted white and then placed in the jar C.
- Among the $R+G-n$ balls left in the jar A, all the red balls are transferred to the jar B, and all the green balls are transferred to the jar C.

In summary, after these operations, no balls are in the jar A, X white balls and $R-X$ red balls are in the jar B, and $n-X$ white balls and $G-(n-X)$ green balls are in the jar C.

Then, X balls are picked up from the jar B, and $n-X$ balls are picked up from the jar C. At this point, we define a random variable Y such that $Y=1$ if the balls picked up from the jars B and C are all white, and $Y=0$ otherwise.

For an integer k such that $0 \leq k \leq n$, let $\Pr(X=k \mid Y=i)$ denote the conditional probability of $X=k$ under the condition, $Y=i$. Here, $i=0$ or $i=1$.

1. Express the conditional probability, $\Pr(X=k \mid Y=1)$, using n.
2. Express the conditional probability, $\Pr(X=k \mid Y=0)$, using R, G, n, and k.

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

草稿用白紙
BLANK PAGE

2026

The Graduate School Entrance Examination

Mathematics

13:00 – 15:30

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not open the problem booklet until the start of the examination is announced.
2. Notify your proctor if you find any printing or production errors.
3. Answers must be written in Japanese or English. The problems are described in Japanese on pages 2–12 and in English on pages 16–26.
4. Examinees for the Department of Civil Engineering must answer any one of the six problems in the problem booklet. Examinees for other departments must answer three problems among the six problems in the problem booklet.
5. One answer sheet is given to the examinees for the Department of Civil Engineering. Three answer sheets are given to the examinees for other departments. Use one answer sheet for each Problem (from 1 to 6). You may use the reverse side if necessary.
6. Write the problem number (1 to 6) that you answer in the upper left box of the answer sheet.
7. Fill in your examinee number in the designated place at the top of each answer sheet.
8. You may use the blank pages of the problem booklet for drafts without detaching them.
9. Any answer sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
10. Do not take the answer sheets or the booklet with you after the examination.

Examinee Number	No.

Write your examinee number in the space provided above.

日本語の注意事項はおもて表紙にある。