2023 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

物 理 学

13：00 ～ 15：00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 日本語の問題文は 2-9 ページ，英語の問題文は 12-19 ページにある。
4. すべての問題に解答すること。
5. 解答用紙は 2 枚渡される。問題（第 1 問，第 2 問）ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
6. 解答用紙左上の枠にその用紙で解答する問題番号（1 または 2）を記入すること。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に受験番号を記入すること。
8. 日本語または英語で解答すること。
9. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
10. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
11. 試験終了後，解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

Instructions in English are on the back cover.

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

第 1 問

質量と太さを無視できる長さlの剛体棒の下端に，大きさの無視できる質量mのおもりを付けた単振子がある。水平方向にx軸，鉛直下向きにy軸を取る。剛体棒の上端は蝶番（ちょうつがい）に取り付けられ，単振子はこれを支点として，xy平面内を，摩擦なく自由に回転できるものとする。剛体棒とy軸のなす角をθ，時刻をt，$\dot{\theta} \equiv \dfrac{d\theta}{dt}$，$\ddot{\theta} \equiv \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$とする。また，重力加速度を$g$とし，空気抵抗は無視できるものとする。

I. 図 1.1 に示すように，蝶番は原点 O に固定されている。

1. おもりのx方向とy方向の運動方程式から，θが満たす微分方程式を導出せよ。
2. θがつねに$|\theta| << 1$を満たすものとし，θの 2 次以上の高次項を無視する近似を用いる。このとき，$\sin\theta \approx \theta$，　$\cos\theta \approx 1$である。おもりを$(x, y) = (0, l)$に静止させた状態から，$t = 0$でx軸正の向きに初速u_1で打ち出す。時刻t（≥ 0）におけるθを求めよ。

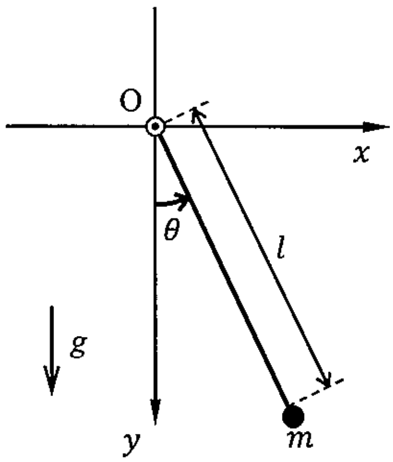

図 1.1

II. 図 1.2 に示すように，蝶番は水平方向にのみ伸び縮みできるばねの先端に固定されている。ばね定数をkとし，ばねと蝶番の質量は無視できるものとする。蝶番のx座標をδとする。ばねが自然長のとき，$\delta=0$である。θがつねに$|\theta|<<1$を満たすものとする。このとき，$\left|\sqrt{\frac{l}{g}}\dot{\theta}\right|<<1$，$\left|\frac{l}{g}\ddot{\theta}\right|<<1$も満たされ，無次元量$\theta$，$\sqrt{\frac{l}{g}}\dot{\theta}$，$\frac{l}{g}\ddot{\theta}$の 2 次以上の量，および，これらの組み合わせからなる 2 次以上の量が無視できる。

1. おもりのy方向の運動方程式から，剛体棒の張力を求めよ。
2. 蝶番に働くx方向の力がつり合っているとして，δとθの間に成り立つ式を求めよ。
3. 問 II.2 の条件において，おもりのx方向の運動方程式から，θが満たす微分方程式を導出せよ。
4. 蝶番が原点 O に，おもりが$(x,y)=(0,l)$にそれぞれ静止している状態から，$t=0$でおもりをx軸正の向きに初速u_2で打ち出す。時刻t（≥ 0）におけるθを求めよ。

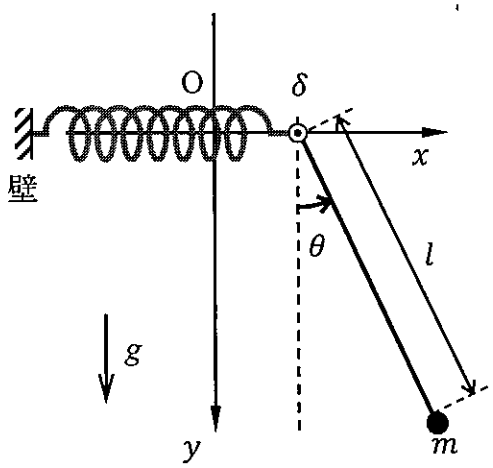

図 1.2

III. 図 1.3 に示すように，蝶番を $t=0$ から原点 O に対して水平方向に変位 $\xi = A\sin(\omega t)$ で強制的に動かす。A と ω は実定数であり，$\omega \neq \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ である。$t<0$ で，蝶番は原点 O に，おもりは $(x, y) = (0, l)$ にそれぞれ静止していた。問 I.2 の近似が成り立つものとして，時刻 t（≥ 0）における θ を求めよ。

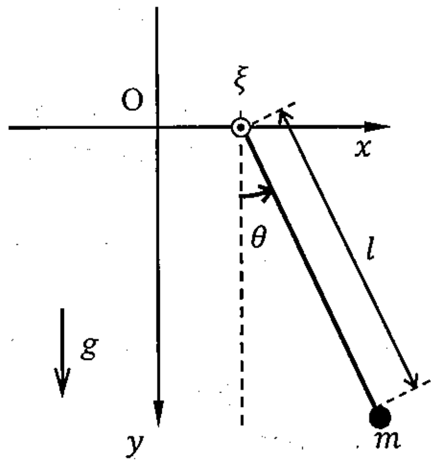

図 1.3

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

第2問

問 I, II の両方に答えよ。

I. 図 2.1 に示すように，真空中に半径が a，長さが無限の円柱領域を考える。この円柱領域内には一様な体積電荷密度 ρ (>0) で電荷が分布している。真空の誘電率を ε_0 とする。

1. 円柱領域の中心軸から r の距離の点での電場ベクトル $\boldsymbol{E}(r)$の大きさと向きを，円柱領域内と円柱領域外のそれぞれについて求めよ。
2. 次に，円柱領域を内半径 $2a$，外半径 $3a$ の無限長の金属円筒で同心円状に取り囲む。図 2.2 は，この場合の円柱領域の中心軸に垂直な断面図を示す。金属円筒は，円柱領域内の電荷分布に影響しないものとする。また金属円筒は，全体としては電気的に中性であるものとする。このとき，金属円筒の内側の表面に誘起される面電荷密度 σ を求めよ。
3. 問 I.2 の条件において，中心軸から距離 $5a$ の点での電場ベクトルの大きさを求めよ。
4. 問 I.1 と問 I.2 の条件における中心軸から距離 $5a$ の点の電位をそれぞれ V_1，V_2 とする。$\Delta V=V_1-V_2$ を求めよ。なお，中心軸の電位をゼロとする。

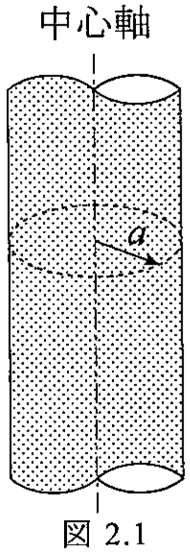

図 2.1

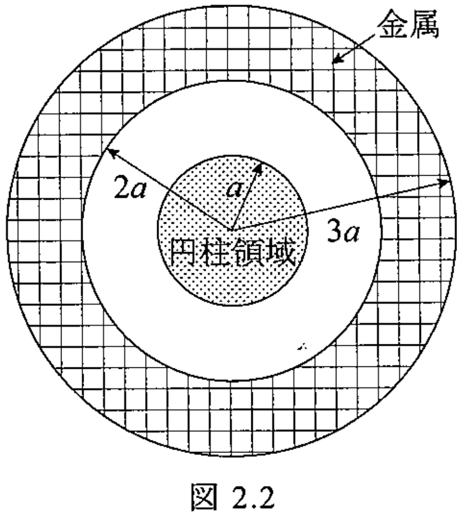

図 2.2

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

II. 図 2.3 のように，真空（誘電率: ε_0，透磁率: μ_0）を速さ c_0 で z 軸方向に伝搬する波数ベクトル $\boldsymbol{k}_0$（$|\boldsymbol{k}_0|=k_0$）の平面電磁波が，誘電率 $4\varepsilon_0$，透磁率 μ_0 の一様な絶縁体媒質に垂直に入射する場合を考える。真空と絶縁体媒質の境界面は原点 O を通る xy 平面であり，$z\geq 0$ の領域が絶縁体媒質で満たされている。

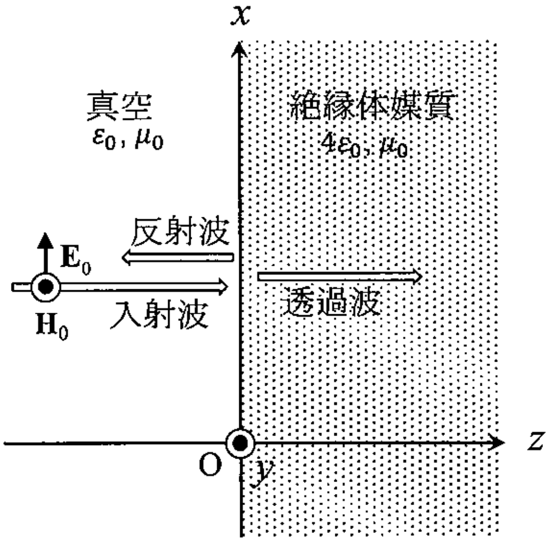

図 2.3

時刻 t における入射波の電場ベクトルを $\boldsymbol{E}_0=\left(E_0\cos\left[k_0(z-c_0t)\right],\,0,\,0\right)$ とする。E_0 は実定数である。入射波の磁場ベクトルを $\boldsymbol{H}_0$ とする。

1. Maxwell の方程式を用いて，$\boldsymbol{H}_0=\left(0,\,\dfrac{E_0}{\mu_0 c_0}\cos\left[k_0(z-c_0t)\right],\,0\right)$ であることを示せ。
2. Maxwell の方程式を $\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{H}_0$ に適用することにより，$c_0=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ が成り立つことを示せ。

境界面を透過した電磁波の電場ベクトル，磁場ベクトル，波数ベクトル，速さをそれぞれ$\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{H}_{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}$， c_{T}とする。境界面で反射された電磁波の電場ベクトル，磁場ベクトル，波数ベクトル，速さをそれぞれ$\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}$，$c_{\mathrm{R}}$とする。このとき，$\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}=-\boldsymbol{k}_0$，$c_{\mathrm{R}}=c_0$，$c_{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0\mu_0}}=\dfrac{1}{2}c_0$ である。境界面において，電磁波の電場ベクトル$\boldsymbol{E}$の境界面内成分，および磁場ベクトル$\boldsymbol{H}$の境界面内成分がそれぞれ連続となることを用いて，次の問 II.3，問 II.4 に答えよ。

3. $\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}$を$\boldsymbol{k}_0$を用いて表せ。
4. $\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$， $\boldsymbol{H}_{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}$を求めよ。

入射波，透過波，反射波の Poynting ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{S}_0$， $\boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}$とする。Poynting ベクトル$\boldsymbol{S}$は， $\boldsymbol{S}\equiv\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$で定義される。

5. $\boldsymbol{S}_0$， $\boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}$を求めよ。
6. 入射波の透過率 T および反射率 R を求めよ。T および R は $T=\dfrac{|\boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}|_{\mathrm{ave}}}{|\boldsymbol{S}_0|_{\mathrm{ave}}}$， $R=\dfrac{|\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}|_{\mathrm{ave}}}{|\boldsymbol{S}_0|_{\mathrm{ave}}}$で与えられる。ここで，$|\boldsymbol{A}|_{\mathrm{ave}}$はベクトル$\boldsymbol{A}$の大きさの時間平均を表す。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

Problem 1

Consider a simple pendulum consisting of a weight of mass m, whose size is negligible, attached to the bottom end of a rigid rod of length l, whose mass and thickness are negligible. Take the x-axis horizontally and the y-axis vertically downward. The top end of the rigid rod is attached to a hinge, and the simple pendulum can rotate freely in the xy-plane using the hinge as a frictionless fulcrum. Let the angle between the rigid rod and the y-axis be θ, and denote the time as t. Define $\dot{\theta} \equiv \dfrac{d\theta}{dt}$ and $\ddot{\theta} \equiv \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$. The gravitational acceleration is denoted by g. Assume air resistance to be negligible.

I. As shown in Fig. 1.1, the hinge is fixed to the origin O.

1. From the equations of motion of the weight in the x- and y-directions, derive the differential equation satisfied by θ.
2. Assuming that θ always satisfies $|\theta| \ll 1$, neglect the second order and higher order terms of θ. Then, $\sin\theta \approx \theta$ and $\cos\theta \approx 1$. The weight is initially at rest at $(x, y) = (0, l)$ and then launched at time $t = 0$ with the initial speed u_1 in the positive direction of the x-axis. Determine θ at time t (≥ 0).

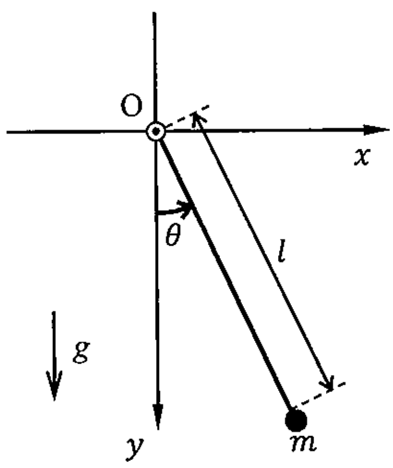

Figure 1.1

II. As shown in Fig. 1.2, the hinge is fixed to the tip of a spring that can only extend and contract in the horizontal direction. The spring constant is k, and the masses of the spring and hinge are negligible. Let δ be the x coordinate of the hinge, and $\delta = 0$ when the spring is at its natural length. Assume that θ always satisfies $|\theta| << 1$. Then, $\left|\sqrt{\frac{l}{g}}\dot{\theta}\right| << 1$ and $\left|\frac{l}{g}\ddot{\theta}\right| << 1$ are also satisfied, and we can neglect the second order and higher order terms of the dimensionless quantities θ, $\sqrt{\frac{l}{g}}\dot{\theta}$, and $\frac{l}{g}\ddot{\theta}$, as well as the second order and higher order terms of their combinations.

1. From the equation of motion of the weight in the y-direction, determine the tension in the rigid rod.
2. Assuming that the forces acting on the hinge in the x-direction are balanced, derive the equation that holds between δ and θ.
3. In the case of Question II.2, derive the differential equation satisfied by θ from the equation of motion of the weight in the x-direction.
4. Initially, the hinge is at rest at the origin O, and the weight is at rest at $(x,y) = (0, l)$. At time $t = 0$, the weight is launched with the initial speed u_2 in the positive direction of the x-axis. Determine θ at time t (≥ 0).

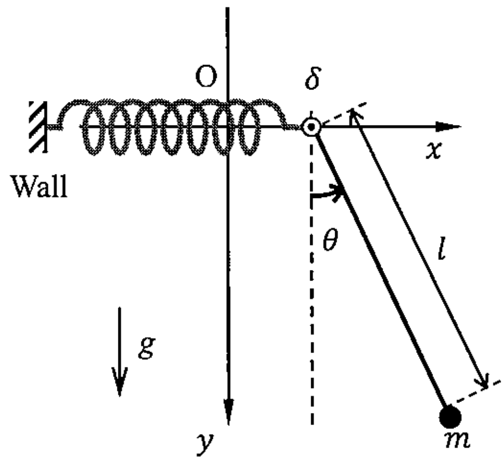

Figure 1.2

III. As shown in Fig. 1.3, from $t = 0$, the hinge is forced to move horizontally with the displacement $\xi = A\sin(\omega t)$ with respect to the origin O. A and ω are real constants, and $\omega \neq \sqrt{\dfrac{g}{l}}$. For $t < 0$, the hinge and the weight were at rest at the origin O and $(x, y) = (0, l)$, respectively. Assuming that the approximation in Question I.2 is valid, determine θ at time t (≥ 0).

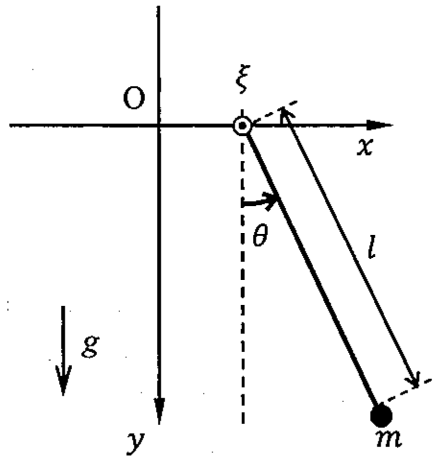

Figure 1.3

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

Problem 2

Answer both Questions I and II.

I. As shown in Fig. 2.1, consider the cylindrical region with a radius of a and an infinite length in vacuum. In this cylindrical region, electric charges are uniformly distributed with a volume charge density of ρ (> 0). The electric permittivity of the vacuum is ε_0.

1. Derive the magnitude and direction of the electric field vector $\boldsymbol{E}(r)$ at the distance r from the central axis of the cylindrical region for both the inside and outside of the cylindrical region.
2. Next, the cylindrical region is surrounded by a concentric metallic hollow cylinder with infinite length, whose inner and outer radii are $2a$ and $3a$, respectively. Fig. 2.2 shows the cross section perpendicular to the central axis of the cylindrical region in this case. The metallic hollow cylinder does not affect the charge distribution in the cylindrical region. The metallic hollow cylinder remains electrically neutral as a whole. Derive the areal charge density σ induced on the inner surface of the metallic hollow cylinder.
3. In the case of Question I.2, determine the magnitude of the electric field vector at the distance $5a$ from the central axis.
4. Let the electric potentials at the distance $5a$ from the central axis be V_1 and V_2 in the cases of Questions I.1 and I.2, respectively. Derive $\Delta V = V_1 - V_2$. Here, assume that the electric potential on the central axis is zero.

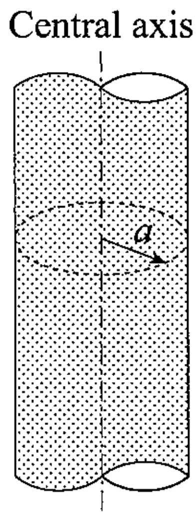

Figure 2.1

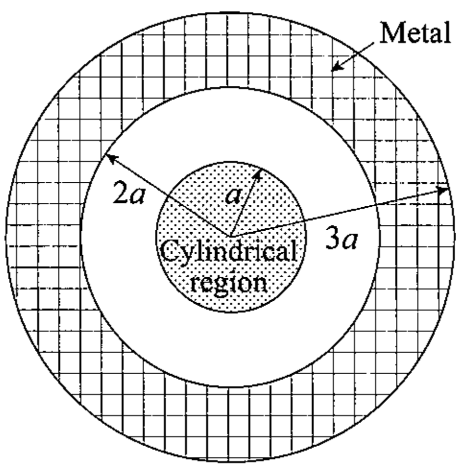

Figure 2.2

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

II. As shown in Fig. 2.3, consider the case where a plane electromagnetic wave with the wave vector $\boldsymbol{k}_0$ ($|\boldsymbol{k}_0| = k_0$) propagating in vacuum (electric permittivity of ε_0 and magnetic permeability of μ_0) along the z-axis with speed c_0 is incident normally on a uniform insulating medium with electric permittivity $4\varepsilon_0$ and magnetic permeability μ_0. The interface between vacuum and the insulating medium lies in the xy-plane that includes the origin O, and the region $z \geq 0$ is filled with the insulating medium.

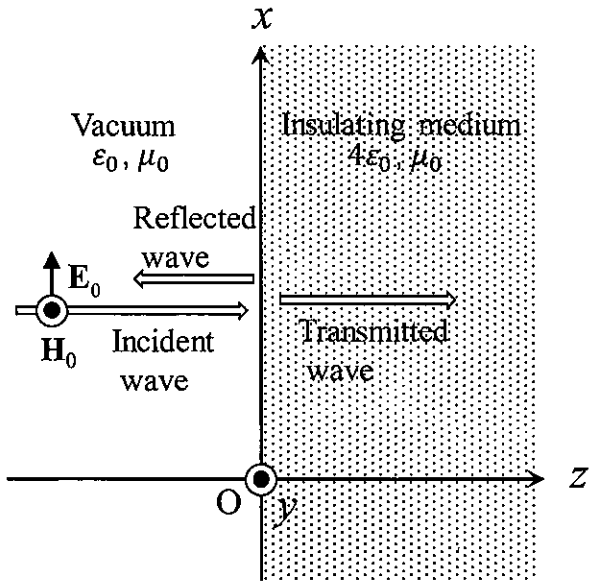

Figure 2.3

Let the electric field vector of the incident wave at time t be $\boldsymbol{E}_0 = (E_0 \cos[k_0(z - c_0 t)],\ 0,\ 0)$, where E_0 is a real constant. Let the magnetic field vector of the incident wave be $\boldsymbol{H}_0$.

1. Using Maxwell's equations, show that $\boldsymbol{H}_0 = \left(0,\ \dfrac{E_0}{\mu_0 c_0} \cos[k_0(z - c_0 t)],\ 0\right)$.

2. By applying Maxwell's equations to $\boldsymbol{E}_0$ and $\boldsymbol{H}_0$, show that the relation $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ holds.

Let $\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{H}_{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}$, and c_{T} be the electric field vector, magnetic field vector, wave vector, and speed of the electromagnetic wave transmitted through the interface, respectively. Let $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}$, and c_{R} be the electric field vector, magnetic field vector, wave vector, and speed of the electromagnetic wave reflected by the interface, respectively. Here, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}} = -\boldsymbol{k}_0$, $c_{\mathrm{R}} = c_0$, and $c_{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0\mu_0}} = \dfrac{1}{2}c_0$. Use the continuity of the tangential component of the electric field vector $\boldsymbol{E}$ and the continuity of the tangential component of the magnetic field vector $\boldsymbol{H}$ at the interface to answer the following Questions II.3 and II.4.

3. Express $\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}$ in terms of $\boldsymbol{k}_0$.
4. Obtain $\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{H}_{\mathrm{T}}$, and $\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}$.

Let $\boldsymbol{S}_0$, $\boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}$, and $\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}$ be the Poynting vectors of the incident, transmitted, and reflected waves, respectively. The Poynting vector $\boldsymbol{S}$ is defined by $\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$.

5. Obtain $\boldsymbol{S}_0$, $\boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}$, and $\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}$.
6. Obtain the transmission coefficient T and reflection coefficient R of the incident wave. T and R are given by $T = \dfrac{|\boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}|_{\mathrm{ave}}}{|\boldsymbol{S}_0|_{\mathrm{ave}}}$ and $R = \dfrac{|\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}|_{\mathrm{ave}}}{|\boldsymbol{S}_0|_{\mathrm{ave}}}$, respectively. Here, $|\boldsymbol{A}|_{\mathrm{ave}}$ is the time average of the magnitude of a vector $\boldsymbol{A}$.

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

2023

The Graduate School Entrance Examination

Physics

13:00 – 15:00

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not open the problem booklet until the start of the examination is announced.
2. Notify your proctor if you find any printing or production errors.
3. The problems are described in Japanese on pages 2-9 and in English on pages 12-19.
4. Answer all problems.
5. Two answer sheets are given. Use one answer sheet for each Problem (1 and 2). You may use the reverse side if necessary.
6. Write the problem number (1 or 2) that you answer on the answer sheet in the upper left box.
7. Fill in your examinee number in the designated place at the top of each answer sheet.
8. Answers must be written in Japanese or English.
9. You may use the blank pages of the problem booklet for drafts without detaching them.
10. Any answer sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
11. Do not take the answer sheets or the booklet with you after the examination.

Examinee Number	No.

Write your examinee number in the space provided above.

日本語の注意事項はおもて表紙にある。

◇M2(299—52)