2023 年 度
大 学 院 入 学 試 験 問 題
数　　学

13：00 ～ 15：00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 日本語の問題文は 2-12 ページ，英語の問題文は 16-26 ページにある。
4. すべての問題に解答すること。
5. 解答用紙は 6 枚渡される。問題（第 1 問から第 6 問）ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
6. 解答用紙左上の枠にその用紙で解答する問題番号（1 から 6）を記入すること。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に受験番号を記入すること。
8. 日本語または英語で解答すること。
9. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
10. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
11. 試験終了後，解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

Instructions in English are on the back cover.

草稿用白紙

BLANK PAGE

第 1 問

以下の問いにすべて答えよ。

I. 以下の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{b^x - c^x}{ax} \qquad (a,\ b,\ c > 0) \tag{1}$$

II. 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

1. $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}=\log x \qquad (x>0) \tag{2}$$

2. $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=2x^2+2x \tag{3}$$

III. a_n を以下のように定義する。

$$a_n=\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \tag{4}$$

ただし，n は正の整数，e は自然対数の底である。
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。
なお，関数 $y=x^{-1}$ （$x>0$）が下に凸であることに留意せよ。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

第 2 問

次の行列$\boldsymbol{A}$ を対角行列$\boldsymbol{D}$ および正則行列$\boldsymbol{P}$ を用いて，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ の形で表すことを考える。ただし，a は実数とする。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

I. $a=1$ のとき，対角行列$\boldsymbol{D}$ を答えよ。

II. $a=1$ のとき，任意の非零三次元実数ベクトル$\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$ であることを示せ。$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ は$\boldsymbol{x}$の転置である。

III. 任意の非零三次元実数ベクトル$\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$ を満たすための，a の条件を求めよ。

IV. a は，問 III において得られた条件を満たすものとする。
実数ベクトル$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$に対して，関数$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の最小値をa を用いて表せ。

草稿用白紙
BLANK PAGE

第 3 問

以下では，$z = x + iy$，$w = u + iv$ を複素数とする。ただし，i は虚数単位，x，y，u および v は実数を表す。

I. 次の積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} \mathrm{d}x \tag{1}$$

を計算するために，複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^6 + 1}$ を考える。

1. $f(z)$ の特異点をすべて求めよ。
2. 留数定理を用いて，I の値を求めよ。

II. 複素 z 平面上の二つの帯状半無限領域を

$$D_1 = \left\{ x + iy \middle| 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ y \geq 0 \right\}, \quad D_2 = \left\{ x + iy \middle| x \geq 0,\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0 \right\}$$

と定義する。このとき，解析関数 $g(z)$ による複素 z 平面から複素 w 平面への写像 $w = g(z)$ を考える。この写像による D_1，D_2 の像をそれぞれ D_1^*，D_2^* とする。

1. $g(z) = \cos z$ のとき，領域 D_1^* を図示せよ。
2. $g(z) = (\cosh z)^3$ のとき，領域 D_2^* を図示せよ。

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

第 4 問

三次元直交xyz座標系において，式(1)および(2)を満たす領域 Vを考える。

$$x^2 + y^2 - z^2 \geq 0 \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 + 2x \leq 0 \tag{2}$$

I. 領域 Vの $z = 1$ における断面形状を図示せよ。

II. 領域 Vの表面積を求めよ。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

第 5 問

以下の問いにすべて答えよ。

I.　$f(x+\pi)=f(x-\pi)$ を満足する周期関数 $f(x)$ を考える。
$-\pi \le x \le \pi$ の区間において，$f(x)$ が以下のように表されるそれぞれの場合について，$f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ。

1. $f(x)=x \quad (-\pi<x<\pi)$，　$f(-\pi)=f(\pi)=0$
2. $f(x)=x^2$

なお，フーリエ級数展開に関しては，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

を用いること。

II.　図 5.1 で表される関数

$$V(t) = A\left|\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right| \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \tag{5}$$

を考える。ただし，A と T は正の実数である。$V(t)$ の複素フーリエ級数展開は，

$$V(t) = -\frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{in\omega t} \tag{6}$$

で与えられる。常微分方程式

$$L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + RI(t) = V(t) \tag{7}$$

を満たす周期解 $I(t)$ を考える。ただし，L と R は正の実数である。

$I(t)$ の複素フーリエ級数展開を，

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \tag{8}$$

のように表すとき，係数 C_n を求めよ。

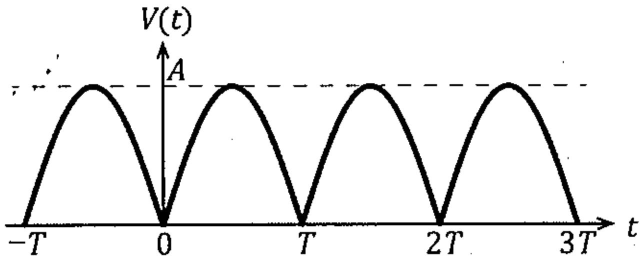

図 5.1

第 6 問

オフ（消灯）状態とオン（点灯）状態の間を交互に繰り返し遷移する１つのライトを考える。オフ状態とオン状態のそれぞれについて，１回あたりの持続時間 T_0 および T_1 は，遷移ごとに変化し独立である。

各状態の開始時刻からの経過時間 t を用い，T_0 と T_1 は，それぞれ次に示す確率密度関数

$$f_0(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \qquad (\lambda_0 > 0) \tag{1}$$

ならびに，

$$f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \qquad (\lambda_1 > 0) \tag{2}$$

により記述される指数分布に従うものとする。すなわち，たとえば，$a \leq T_0 \leq b$ （$0 \leq a \leq b$）が満たされる確率 $P_0(a,b)$ は，

$$P_0(a,b) = \int_a^b f_0(t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

により計算できる。

いま，時刻 $\tau = 0$ でライトがオン状態からオフ状態に遷移したとする。以下の問いに答えよ。

I. T_0 の期待値と標準偏差を計算せよ。

II. $T_0 + T_1$ の期待値と標準偏差を計算せよ。

III. 十分長い時間が経ち，$(\lambda_0 + \lambda_1)\tau \to \infty$ と近似できる状況を考える。

1. ライトがオフ状態である確率を計算せよ。
2. ライトがいまの状態から次の状態へ遷移するまでの残り時間の期待値を計算せよ。

IV. ライトが時刻 $\tau = \tau_x$ （$\tau_x > 0$）において $\tau = 0$ 以降の最初のオン状態である確率を計算せよ。

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

Problem 1

Answer all the following questions.

I. Find the following limit value:

$$\lim_{x \to 0} \frac{b^x - c^x}{ax} \qquad (a, b, c > 0)\,. \tag{1}$$

II. Find the general solutions of the following differential equations.

1. $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = \log x \qquad (x > 0) \tag{2}$$

2. $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 2x^2 + 2x \tag{3}$$

III. Let a_n be defined by

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}\,, \tag{4}$$

where n is a positive integer and e is the base of natural logarithm.
Find $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.
Note that the function $y = x^{-1}$ $(x > 0)$ is convex downward.

草 稿 用 白 紙

BLANK PAGE

Problem 2

Consider expressing the following matrix $\boldsymbol{A}$ in a form of $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$, using a diagonal matrix $\boldsymbol{D}$ and a regular matrix $\boldsymbol{P}$. Here, a is a real number.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

I. When $a = 1$, find a diagonal matrix $\boldsymbol{D}$.

II. When $a = 1$, prove $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ for any three-dimensional non-zero real vector $\boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ represents the transpose of $\boldsymbol{x}$.

III. Find the condition of a which satisfies $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ for any three-dimensional non-zero real vector $\boldsymbol{x}$.

IV. Assume that a satisfies the condition obtained in Question III.
For a real vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, express the minimum value of the function $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ by using a.

草稿用白紙

BLANK PAGE

Problem 3

In the following, $z = x + iy$ and $w = u + iv$ represent complex numbers, where i is the imaginary unit, and x, y, u and v are real numbers.

I. In order to evaluate the integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} \mathrm{d}x \ , \tag{1}$$

consider the complex function $f(z) = \dfrac{1}{z^6 + 1}$.

1. Find all singularities of $f(z)$.
2. By applying the residue theorem, determine the value of I.

II. Two domains, which are banded and semi-infinite on the complex z-plane, are defined as:

$$D_1 = \left\{x + iy \middle| 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ y \ge 0\right\} \text{ and } D_2 = \left\{x + iy \middle| x \ge 0,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le 0\right\}.$$

Consider the mapping $w = g(z)$ from the complex z-plane to the complex w-plane with an analytic function $g(z)$. Let D_1^* and D_2^* be the images of D_1 and D_2, respectively, through this mapping.

1. When $g(z) = \cos z$, sketch the domain D_1^*.
2. When $g(z) = (\cosh z)^3$, sketch the domain D_2^*.

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

Problem 4

In the three-dimensional orthogonal xyz coordinate system, consider the region V that satisfies Equations (1) and (2).

$$x^2 + y^2 - z^2 \geq 0 \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 + 2x \leq 0 \tag{2}$$

I. Sketch the cross-sectional shape of the region V at $z = 1$.

II. Obtain the surface area of the region V.

草稿用白紙

BLANK PAGE

Problem 5

Answer all the following questions.

I. Let a periodic function $f(x)$ satisfy the condition $f(x+\pi) = f(x-\pi)$. Find the Fourier series expansion of $f(x)$ for each case, where $f(x)$ is expressed as follows for the interval $-\pi \leq x \leq \pi$.

1. $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi),\quad f(-\pi) = f(\pi) = 0$
2. $f(x) = x^2$

For the Fourier series expansion, the following equations should be used.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \tag{4}$$

II. Consider the function shown in Figure 5.1 as

$$V(t) = A\left|\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right| \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) . \tag{5}$$

Note that A and T are positive real numbers. The complex Fourier series expansion of $V(t)$ is given as

$$V(t) = -\frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{in\omega t} . \tag{6}$$

Let $I(t)$ be the periodic solution that satisfies the ordinary differential equation

$$L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + RI(t) = V(t) . \tag{7}$$

Note that L and R are positive real numbers.

Find the coefficient C_n, when the complex Fourier series expansion of $I(t)$ is expressed as

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{in\omega t} . \tag{8}$$

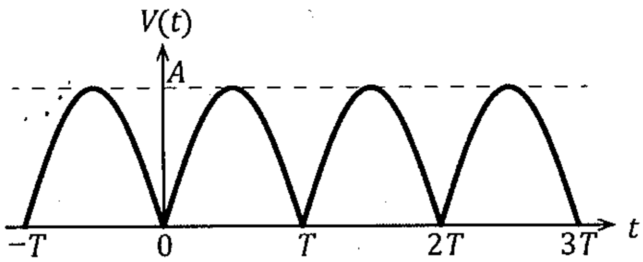

Figure 5.1

Problem 6

Consider a light whose state alternately and repeatedly switches between the OFF (no light) state and the ON (light) state. For each OFF and ON state, the duration, represented by T_0 and T_1 respectively, changes at each transition and is independent.

By using t, which represents elapsed time from the initiation of each state, T_0 and T_1 follow the exponential distribution whose probability density functions are described respectively as

$$f_0(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \qquad (\lambda_0 > 0)\,, \tag{1}$$

and

$$f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \qquad (\lambda_1 > 0)\ . \tag{2}$$

Here, for example, $P_0(a, b)$, which is the probability that the condition $a \leq T_0 \leq b$ $(0 \leq a \leq b)$ is satisfied, can be calculated as

$$P_0(a, b) = \int_a^b f_0(t)\mathrm{d}t\ . \tag{3}$$

Assume that the light switches from the ON state to the OFF state at time $\tau = 0$. Answer the following questions.

I. Calculate the expected value and the standard deviation of T_0.

II. Calculate the expected value and the standard deviation of $T_0 + T_1$.

III. Consider a situation where time tends towards infinity and the condition $(\lambda_0 + \lambda_1)\tau \to \infty$ approximately holds.

1. Calculate the probability that the light is in the OFF state.
2. Calculate the expected value of the remaining time from the current state to the next state transition of the light.

IV. At the time $\tau = \tau_x$ $(\tau_x > 0)$, calculate the probability that the light is in the ON state for the first occasion after $\tau = 0$.

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

草 稿 用 白 紙
BLANK PAGE

2023

The Graduate School Entrance Examination

Mathematics

13:00 – 15:00

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not open the problem booklet until the start of the examination is announced.
2. Notify your proctor if you find any printing or production errors.
3. The problems are described in Japanese on pages 2-12 and in English on pages 16-26.
4. Answer all problems.
5. Six answer sheets are given. Use one answer sheet for each Problem (from 1 to 6). You may use the reverse side if necessary.
6. Write the problem number (1 to 6) that you answer on the answer sheet in the upper left box.
7. Fill in your examinee number in the designated place at the top of each answer sheet.
8. Answers must be written in Japanese or English.
9. You may use the blank pages of the problem booklet for drafts without detaching them.
10. Any answer sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
11. Do not take the answer sheets or the booklet with you after the examination.

Examinee Number	No.

Write your examinee number in the space provided above.

日本語の注意事項はおもて表紙にある。